

# THESE

présentée

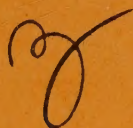
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le **GRADE de DOCTEUR-INGENIEUR**

par

**Bernard SIROT**



**CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'INSTABILITE PAR VOILEMENT  
DES COQUES PRISMATIQUES  
(POUTRES CAISSONS RAIDIES LONGITUDINALEMENT)**

Soutenue le 5 juillet 1969 devant la Commission d'Examen

|                  |                |
|------------------|----------------|
| Monsieur TARDY   | Président      |
| Monsieur RAVILLY | } Examinateurs |
| Monsieur COTTU   |                |
| Monsieur POUSSET |                |



T H E S E

présentée à la

Faculté des Sciences de Nantes

pour obtenir

le grade de Docteur-Ingénieur

par

B. S I R O T

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'INSTABILITE PAR  
VOILEMENT DES COQUES PRISMATIQUES

(POUTRES CAISSONS RAIDIES LONGITUDINALEMENT)

Soutenue le 5 *juillet* 1969 devant la Commission d'examen

Monsieur TARDY

Président

Monsieur RAVILLY

Monsieur COTTU

Monsieur POUSSET

} Examineurs



UNIVERSITE DE NANTES

FACULTE DES SCIENCES

---

|                                |                         |                          |
|--------------------------------|-------------------------|--------------------------|
| <b>Doyen</b>                   | M. DUNOYER de SEGONZAC  | Chimie                   |
| <b>Assesseur</b>               | M. SELLIER              | Zoologie                 |
| <b>Professeurs</b>             | M. PAUC                 | Mathématiques            |
|                                | M. RAVILLY (E.N.S.M.)   | Mécanique                |
|                                | M. RAFFIN               | Mécanique rationnelle    |
|                                | M. GARRIGUES            | Biologie végétale        |
|                                | M. BRILLOUET            | Analyse numérique        |
|                                | M. GRAFF                | Chimie                   |
|                                | M. VIVIER (E.N.S.M.)    | Mathématiques appliquées |
|                                | M. COLLET               | Physique                 |
|                                | M. BOULLLOUD (C.S.U.)   | Physique                 |
|                                | Melle DEBRAUX           | Botanique                |
|                                | M. PETRESCO             | Mathématiques            |
|                                | M. PIERI                | Biologie animale         |
|                                | M. WOJTKOWIAK           | Chimie                   |
|                                | M. AVIGNON              | Physique                 |
|                                | M. MINN                 | Physique                 |
|                                | M. MOUTON               | Physique                 |
|                                | M. TARDY (E.N.S.M.)     | Mécanique                |
| <b>Professeurs sans chaire</b> | M. GOBIN (E.N.S.M.)     | Chimie                   |
|                                | M. CAVET                | Sciences de la Terre     |
|                                | M. OTTMANN              | Sciences de la Terre     |
|                                | M. MEZENECV (E.N.S.M.)  | Physique                 |
|                                | M. MOLINARO             | Mathématiques            |
|                                | M. DUPONT               | Biologie végétale        |
|                                | M. ROUXEL               | Chimie                   |
|                                | M. QUINIOU              | Chimie                   |
|                                | Melle OFFRET (E.N.S.M.) | Physique                 |
|                                | M. LASKAR               | Physique                 |
|                                | M. GOUREAUX             | Physique                 |

**Maîtres de Conférences**

|                        |                               |
|------------------------|-------------------------------|
| M. FORESTIER           | Sciences de la Terre          |
| M. SAUDRAY             | Biologie animale              |
| M. MARTIN              | Chimie                        |
| M. LE DOUARIN Georges  | Biologie végétale             |
| M. AMOURIQ             | Psychophysiologie             |
| Melle ASTIE (C.S.U.)   | Botanique                     |
| M. LAMEAU (E.N.S.M.)   | Mathématiques                 |
| Mme LE DOUARIN Nicole  | Biologie végétale             |
| M. TOURNOUX            | Chimie minérale               |
| M. GUEVEL (E.N.S.M.)   | Mathématiques                 |
| M. GOUIN (C.S.U.)      | Chimie                        |
| M. POINTEAU (E.N.S.M.) | Chimie                        |
| M. SULMONT (E.N.S.M.)  | Mathématiques                 |
| M. BARDON              | Physique                      |
| M. LONCKE              | Physique                      |
| M. LEBRUN              | Biologie animale              |
| M. JONARD              | Biologie végétale             |
| M. IBISCH              | Maître de Conférences associé |
| M. FOUQUES             | Mathématiques                 |
| M. ROSIER              | Physique                      |
| M. LEBORGNE            | Mathématiques                 |
| Melle LEYCURAS         | Physique                      |
| M. REMY (C.S.U.)       | Chimie                        |
| M. LE BIHAN            | Physique                      |
| M. MATZ (C.S.U.)       | Biologie                      |

**Secrétaire de la Faculté**

M. PAILLET

Attaché Principal

Le présent travail a été effectué au Laboratoire de Résistance des Matériaux, dirigé par Monsieur D. TARDY, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes.

Nous voudrions particulièrement remercier, Monsieur le Professeur TARDY, qui a inspiré ce travail et nous a permis de le mener à bien, en nous initiant à la recherche et en nous guidant de ses conseils éclairés. Nous lui présentons l'expression de notre respectueuse gratitude.

Nous tenons à témoigner nos plus vifs remerciements à Monsieur le Professeur RAVILLY, à Monsieur COTTU, Maître de Conférences, ainsi qu'à Monsieur POUSSET, du Centre Technique Industriel de la Construction Métallique, qui ont bien voulu nous faire l'honneur de participer au Jury.

Nous adressons nos remerciements à Messieurs les Maîtres-Assistants et Assistants du Laboratoire de Résistance des Matériaux et du Centre de Calcul, pour l'aide précieuse qu'ils nous ont apportée.

Nous remercions la Société "SUD-AVIATION" de Nantes qui a réalisé avec un soin extrême les poutres destinées à nos essais.

Enfin, nous exprimons toute notre gratitude au personnel technique de l'E.N.S.M. qui nous a aidé dans nos réalisations pratiques ainsi qu'à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de cette thèse.



## S O M M A I R E

-:-:-

| <u>INTRODUCTION</u>                                                                     | <u>Pages</u> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 1.1. - <u>GENERALITES</u>                                                               | 1            |
| 1.1.1. Définitions                                                                      |              |
| 1.1.2. Symboles utilisés                                                                |              |
| 1.2. - <u>OBJET DE L'ETUDE</u>                                                          | 3            |
| 1.2.1. Instabilité des poutres caissons planes                                          |              |
| 1.2.2. Instabilité des poutres caissons comportant un raidisseur<br>au 1/5ème supérieur |              |
| <br><u>CONNAISSANCES ACTUELLES SUR LE COMPORTEMENT DES POUTRES DROITES PLANES</u>       |              |
| 2.1. - <u>RAPPEL DES THEORIES CLASSIQUES DU VOILEMENT DANS LE DOMAINE ELASTIQUE</u>     | 7            |
| 2.1.1. Théorie linéaire du voilement                                                    |              |
| 2.1.2. Théorie linéaire appliquée aux plaques raidies                                   |              |
| 2.1.3. Théorie non linéaire des plaques                                                 |              |
| 2.2. - <u>THEORIES CLASSIQUES DU VOILEMENT DANS LE DOMAINE PLASTIQUE</u>                | 11           |
| 2.2.1. Généralités sur ces théories                                                     |              |
| 2.2.2. Etude de la théorie d'ILLIOUSHINE                                                |              |
| 2.2.3. Etude de la théorie d'ENGESSER-KARMAN                                            |              |
| 2.2.4. Etude de la théorie de BLEICH                                                    |              |
| 2.2.4.1. Application aux plaques soumises à la flexion pure                             |              |
| 2.2.4.2. Application aux plaques soumises à un effort tranchant                         |              |
| 2.2.5. Comparaison des diverses théories du voilement plastique                         |              |
| 2.3. - <u>THEORIE DE BASLER SUR LE COMPORTEMENT DES POUTRES DROITES PLANES</u>          | 17           |
| 2.3.1. Poutre plane soumise à l'effort tranchant pur                                    |              |
| 2.3.1.1. Généralités                                                                    |              |
| 2.3.1.2. Détermination de l'inclinaison du champ de tension                             |              |

- 2.3.1.3. Détermination de la composante verticale  $T_{\sigma}$  du champ de tension
- 2.3.1.4. Valeur limite de  $T_{\sigma}$
- 2.3.1.5. Expression de l'effort tranchant ultime
- 2.3.2. Poutre plane soumise à la flexion pure
  - 2.3.2.1. Flambage vertical de la semelle comprimée
  - 2.3.2.2. Flambage latéral de la semelle comprimée
  - 2.3.2.3. Flambage par torsion de la semelle comprimée
  - 2.3.2.4. Contraintes ultimes de flexion

## DISCUSSION ET COMPLEMENTS SUR LES THEORIES PRECEDEMMENT ENONCEES

### 3.1. - COMPLEMENTS SUR LA THEORIE LINEAIRE DES PLAQUES

31

- 3.1.1. Résolution du problème du voilement à partir de l'analyse de la déformée
  - 3.1.1.1. Définitions des paramètres utilisés dans cette étude
  - 3.1.1.2. Hypothèses
  - 3.1.1.3. Expression de la flèche transversale et de l'effort exercé par le raidisseur sur la plaque
  - 3.1.1.4. Résolution de l'équation différentielle de la surface élastique
- 3.1.2. Application à divers cas de chargement pour des plaques planes avec ou sans raidisseur, supposées appuyées sur leur contour
  - 3.1.2.1. Plaque sans raidisseur soumise à la flexion pure
  - 3.1.2.2. " " " " à l'effort tranchant
  - 3.1.2.3. " " " " à la flexion et à l'effort tranchant
  - 3.1.2.4. Plaque avec raidisseur soumise à la flexion pure
  - 3.1.2.5. " " " " à l'effort tranchant
  - 3.1.2.6. " " " " à la flexion et à l'effort tranchant

### 3.2. - DISCUSSION DE LA THEORIE DE BASLER

47

- 3.2.1. Effort tranchant ultime
  - 3.2.1.1. Choix du critère de plasticité
  - 3.2.1.2. Inclinaison du champ de tension à  $45^{\circ}$
  - 3.2.1.3. Rigidité des semelles
  - 3.2.1.4. Uniformité du champ de tension

### 3.2.2. Moment de flexion ultime

- 3.2.2.1. Valeur limite maximum du coefficient de finesse  $\beta$  vis-à-vis du flambage vertical
- 3.2.2.2. Calcul du rapport  $\mu/\mu_e$  pour les valeurs limites des coefficients de finesse
- 3.2.2.3. Comparaison des résultats obtenus par la droite de BASLER avec ceux obtenus en utilisant deux demi-droites

## ETUDE EXPERIMENTALE

|                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1. - <u>CHOIX D'UN PROGRAMME D'ESSAIS</u>                                            | 61 |
| 4.2. - <u>CARACTERISTIQUES DES POUTRES D'ESSAIS</u>                                    | 62 |
| 4.2.1. Constitution des poutres                                                        |    |
| 4.2.2. Caractéristiques utilisées pour le calcul de la résistance des poutres d'essais |    |
| 4.2.3. Caractéristiques des matériaux                                                  |    |
| 4.3. - <u>TYPES D'ESSAIS - MATERIEL EXPERIMENTAL</u>                                   | 69 |
| 4.4. - <u>RESULTATS EXPERIMENTAUX</u>                                                  | 69 |
| 4.4.1. Flèches verticales au milieu des poutres                                        |    |
| 4.4.2. Flèches latérales                                                               |    |
| 4.4.2.1. Panneaux de poutre soumis essentiellement à l'effort tranchant                |    |
| 4.4.2.2. Panneaux de poutre soumis à la flexion pure                                   |    |
| 4.4.3. Déformations linéiques                                                          |    |
| 4.4.3.1. Non applicabilité de la théorie des poutres                                   |    |
| 4.4.3.2. Détermination des contraintes dans les panneaux soumis à l'effort tranchant   |    |
| 4.4.3.3. Répartition des contraintes dans les panneaux soumis à la flexion pure        |    |
| 4.4.4. Etude photoélastique                                                            |    |
| 4.4.4.1. Observations photoélastiques sur les panneaux soumis à l'effort tranchant     |    |
| 4.4.4.1.1. Panneaux non raidis                                                         |    |
| 4.4.4.1.2. Panneaux raidis                                                             |    |
| 4.4.4.2. Observations photoélastiques sur les panneaux soumis à la flexion pure        |    |
| 4.4.4.2.1. Panneaux non raidis                                                         |    |
| 4.4.4.2.2. Panneaux raidis                                                             |    |

4.2.5. Charges ultimes

4.2.6. Détermination du degré d'encastrement des âmes sur les semelles

#### COMMENTAIRES SUR LES EXPERIENCES

### 5.1. - CHARGES ULTIMES CORRESPONDANT A LA RUINE DE LA POUTRE SOUS L'ACTION DE L'EFFORT TRANCHANT 103

5.1.1. Poutres non raidies

5.1.1.1. Tableau des résultats

5.1.1.2. Calculs d'erreurs

5.1.1.3. Comparaison des résultats expérimentaux aux charges théoriques

5.1.2. Poutres raidies

5.1.2.1. Ebauche d'une théorie

5.1.2.2. Tableau des résultats

5.1.2.3. Comparaison des résultats expérimentaux aux charges théoriques

### 5.2. - CHARGES ULTIMES CORRESPONDANT A LA RUINE DE LA POUTRE SOUS L'ACTION DU MOMENT DE FLEXION 113

5.2.1. Observations expérimentales

5.2.2. Tableau des résultats

5.2.3. Calculs d'erreurs

5.2.4. Comparaison des résultats expérimentaux aux charges théoriques

#### CONCLUSION

#### BIBLIOGRAPHIE

## INTRODUCTION

-:-:-

### 1.1 - GENERALITES -

#### 1.1.1. Définitions

On définit par "poutre caisson" une poutre creuse dont les parois sont minces par rapport aux dimensions de la section droite.

Dans notre étude, nous nous intéresserons à des poutres caissons dont la section droite est rectangulaire et dont les parois latérales sont telles que le rapport  $\frac{b}{h}$  de leur hauteur à leur épaisseur soit élevé.

Les divers paramètres définissant la géométrie de la poutre sont définis au § 1.2.1.

#### 1.1.2. Symboles utilisés

× Paramètres de formes (voir Fig. 1)

- L = longueur totale de la poutre
- l = largeur de la poutre (entre parois latérales)
- a = longueur d'un panneau (entre raidisseurs)
- b = hauteur de la poutre = largeur d'un panneau
- h = épaisseur des âmes
- l' = largeur des semelles
- h' = épaisseur des semelles
- b<sub>1</sub> = distance de l'axe du raidisseur à la face intérieure de la semelle comprimée. (b'<sub>1</sub> = b<sub>1</sub> - S. S = demi-largeur du raidisseur).
- b<sub>2</sub> = b - b<sub>1</sub>    b'<sub>2</sub> = b<sub>2</sub> - S
- α = coefficient de forme =  $\frac{a}{b}$
- β = coefficient de finesse des âmes =  $\frac{b}{h}$
- α<sub>1</sub> = coefficient de forme du sous panneau supérieur (1) =  $\frac{a}{b'_1}$
- α<sub>2</sub> = coefficient de forme du sous panneau inférieur (2) =  $\frac{a}{b'_2}$

× Désignation des efforts

- τ = contrainte de cisaillement
- τ<sub>cr</sub> = contrainte critique de cisaillement
- τ<sub>e</sub> = limite élastique du cisaillement
- T<sub>τ</sub> = effort tranchant dû au cisaillement critique
- T<sub>σ</sub> = effort tranchant dû à la composante verticale des forces de traction
- T<sub>u</sub> = effort tranchant ultime

- $T_P$  = effort tranchant correspondant à l'entrée en phase plastique de la matière sous les contraintes de cisaillement
- $\sigma_x$  = contrainte normale dans la direction x
- $\sigma_y$  = contrainte normale dans la direction y
- $\sigma_t$  = contrainte de traction dans le champ de tension
- $N_y$  =  $N_o (1 - \phi \frac{y}{b})$  = force par unité de hauteur d'âme due à la distribution des contraintes de flexion
- $\sigma_{cr}$  = contrainte critique de flexion
- $\sigma_o$  = contrainte de référence =  $\frac{\pi^2 D}{b^2 h}$  (correspondant au voilement d'une bande transversale d'un panneau sous la charge d'Euler)
- $M_e$  = moment de flexion pure correspondant à l'apparition de  $\sigma_e$  dans les semelles
- $M_p$  = moment de flexion pure correspondant à la plastification de toute la section droite de la poutre
- $M_u$  = moment ultime de flexion
- $k_1$  = coefficient de voilement à la flexion =  $\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_o}$
- $k_2$  = coefficient de voilement au cisaillement  $\frac{\tau_{cr}}{\sigma_o}$

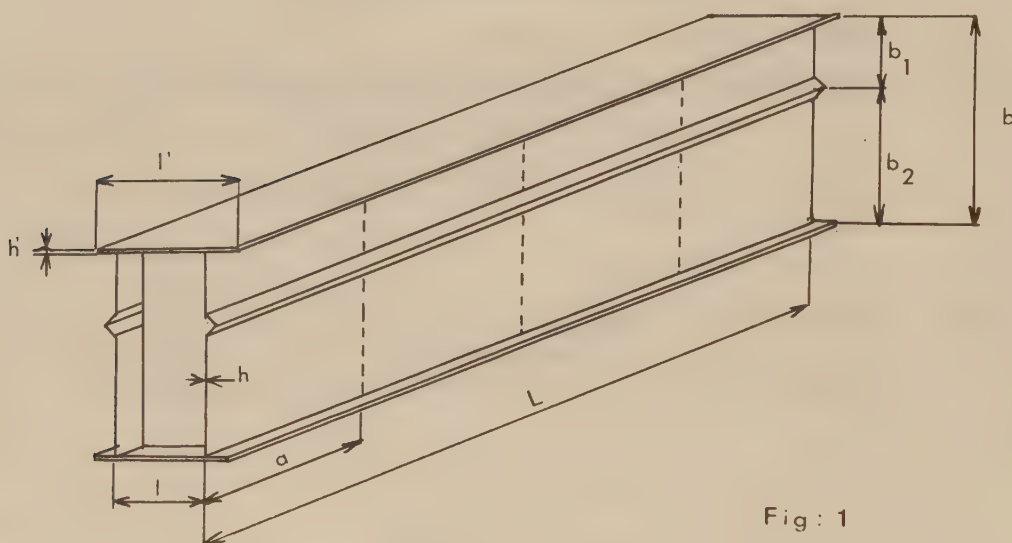
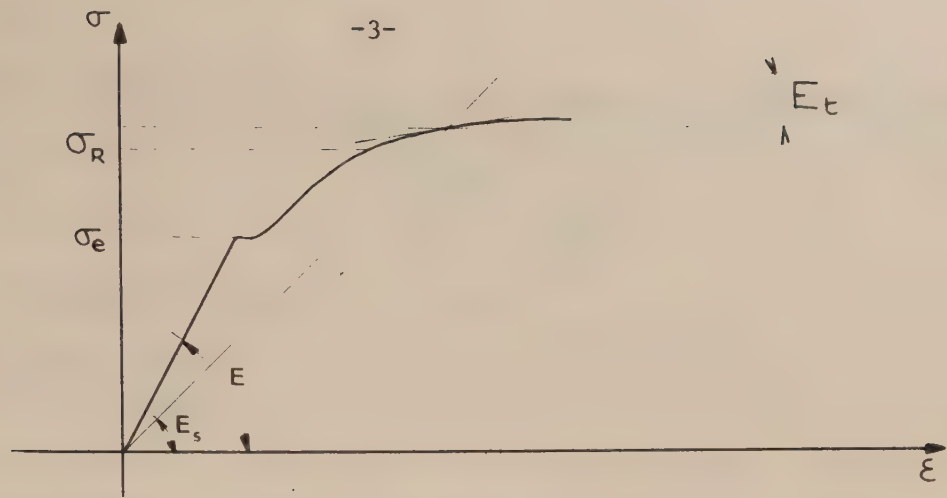


Fig : 1

#### x Caractéristiques des matériaux

- $E$  = module d'Young du matériau constituant les âmes des poutres
- $\nu$  = coefficient de Poisson de ce matériau
- $\sigma_e$  = limite élastique de ce matériau
- $\eta$  = facteur de plasticité
- $E_t$  = module tangent de ce matériau
- $E_s$  = module sécant de ce matériau
- $E_r$  = module réduit d'après ENGESSER-KARMAN
- $G$  = module transversal =  $\frac{E}{2(1 + \nu)}$
- $\frac{E}{1 - \nu^2}$  = module des plaques

Fig. 2



\* Autres paramètres intervenant dans la résistance des poutres

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  = rigidité de flexion d'un panneau de poutre

$I$  = moment d'inertie d'un raidisseur longitudinal relatif à la flexion normale au plan de la plaque (Fig. 3).

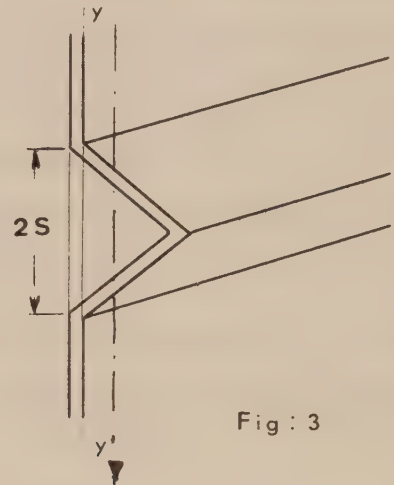


Fig : 3

$\gamma$  = rigidité relative du raidisseur =  $\frac{E I}{D.b.}$

$\gamma^*$  = rigidité relative optimum du raidisseur

$A$  = aire de la section droite du raidisseur

$\delta = \frac{A}{bh} = \frac{\text{aire de la section droite du raidisseur}}{\text{aire de la section droite d'une âme}}$

$F^*$  = aire relative optimum du raidisseur longitudinal

$\phi$  = angle du champ de tension sous l'action du cisaillement

$J$  = constante de torsion de la section droite de la poutre

$A_m$  = aire de la moitié d'une semelle (associée à une âme)

$A_a$  = aire de la section transversale d'une âme

$\rho = \frac{A_a}{A_m}$

## 1.2 - OBJET DE L'ETUDE -

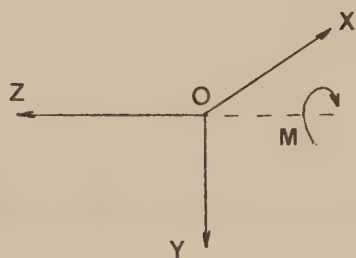
### 1.2.1. Instabilité des poutres caissons planes

\* Poutre soumise à la flexion pure

Si on considère une poutre dont la ligne moyenne est confondue avec  $Ox$  soumise à un moment de flexion dont l'axe est porté par  $Oz$ , on sait que

l'état de contrainte est monoaxé et que la contrainte maximale s'exprime par :

$$\sigma_{\max} = \frac{6 M (x)}{h \cdot b^2}$$



$M(x)$  = moment de flexion dans la section d'abscisse  $x$

$h$  = largeur de la poutre

$b$  = hauteur de la poutre

La hauteur de la poutre qui intervient par son carré au dénominateur a un rôle prédominant dans la valeur de la contrainte  $\tau_{\max}$ . Ceci explique que toutes considérations de stabilité étant exclues, il soit intéressant d'utiliser des poutres dont la hauteur soit très supérieure à la largeur. Par ailleurs, la largeur n'intervenant qu'à la puissance 1 au dénominateur de l'expression de  $\sigma$  on conçoit que pour éliminer des contraintes supplémentaires dues au poids propre de la poutre, il soit intéressant de diminuer cette largeur.

A la limite, la section idéale vis-à-vis de la flexion serait une section dont la hauteur serait infiniment grande devant sa largeur.

Nous sommes cependant limités pour adopter ces dispositions par des considérations de stabilité. En dehors des phénomènes de déversement et d'instabilité de torsion, quasiment inexistantes pour une poutre caisson, il peut se produire un phénomène de voilement des âmes.

Considérons en effet, la poutre caisson schématisée sur la Fig.4.

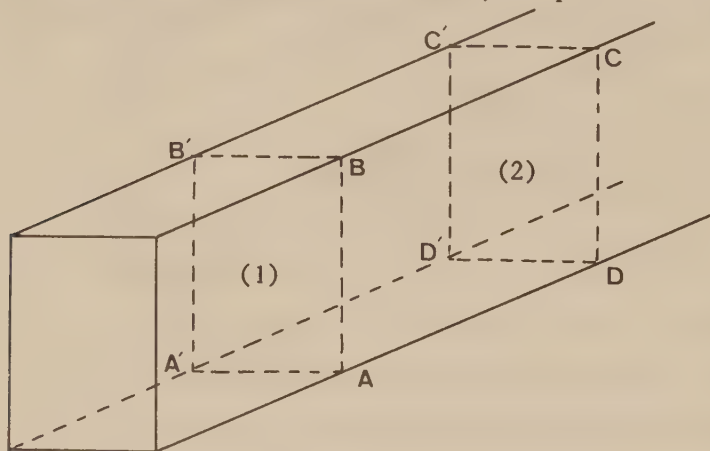


Fig: 4

$A A' B B'$  et  $C C' D D'$  sont 2 cadres destinés à assurer en chacune des sections (1) et (2) la conservation des angles droits  $B' B A$ ,  $B A A'$  ... etc.

Si la poutre ainsi représentée est soumise à un moment de flexion  $M$  chaque plaque  $ABCD$  et  $A'B'C'D'$  sera soumise à une répartition de contraintes de flexion pouvant engendrer l'instabilité du panneau.

#### \* Poutre soumise à l'effort tranchant

En fait, un panneau de poutre ne sera jamais soumis à l'effort tran-

chant pur, l'existence de ce dernier impliquant l'existence d'un moment de flexion. Toutefois, pour les panneaux voisins des appuis, on pourra considérer que l'effort tranchant a un rôle prédominant sur la stabilité des panneaux et on pourra étudier cette stabilité en considérant seulement l'effort tranchant.

\* Poutre soumise à la flexion simple

Lorsque les effets du moment de flexion et de l'effort tranchant vis-à-vis de la stabilité du panneau seront de même intensité, on sera amené à étudier un nouveau cas de sollicitations faisant intervenir l'interaction des contraintes de flexion et de cisaillement.

\* Cas général

Les sollicitations à considérer vis-à-vis de la stabilité des panneaux, suivant les cas de charge, sont résumés sur la Fig. 5.

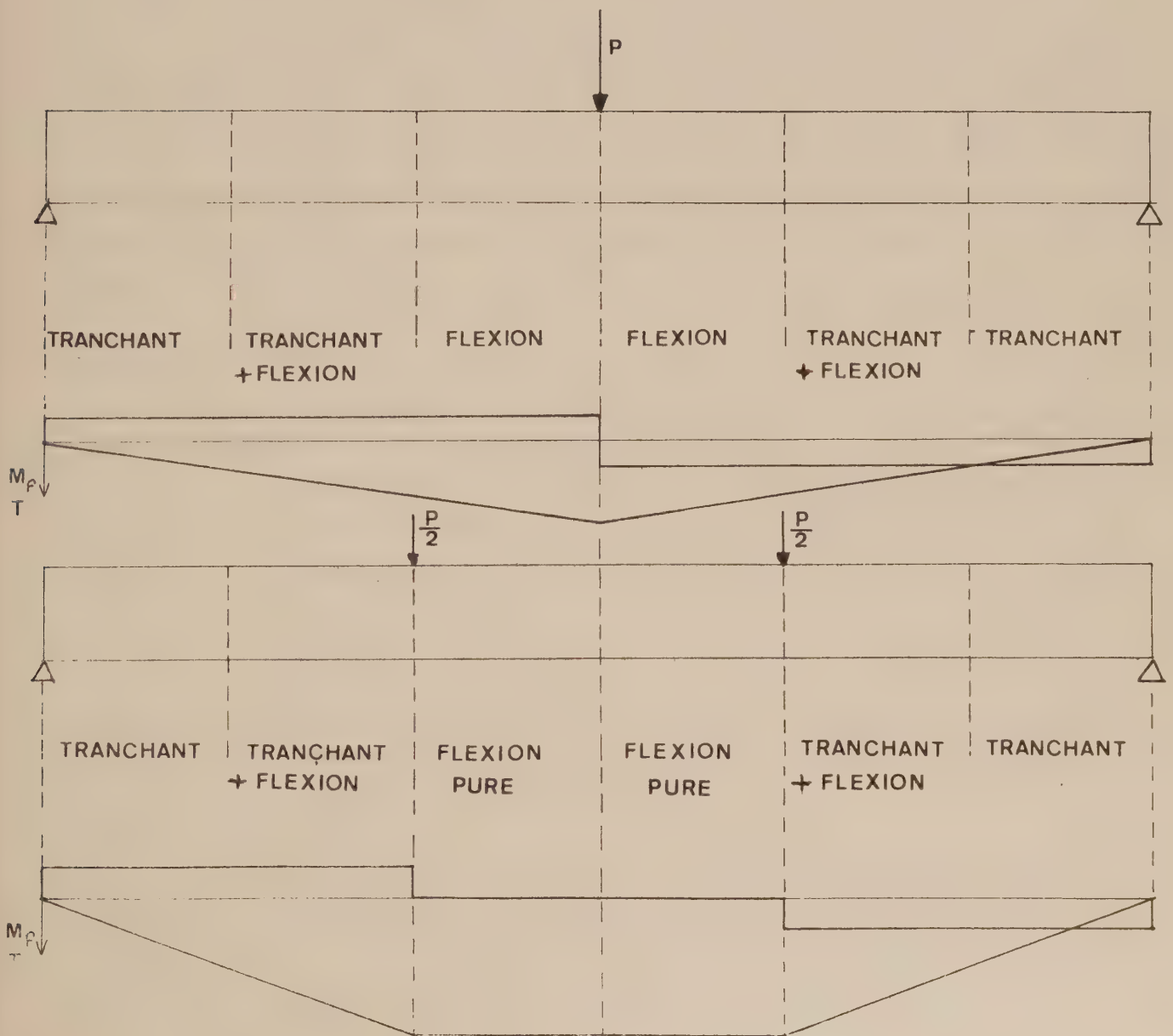


FIG : 5

1.2.2. Instabilité des poutres caissons comportant un raidisseur au 1/5<sup>e</sup> supérieur

Nous nous proposons d'étudier l'influence, sur la stabilité des parois d'une poutre caisson, d'un raidisseur embouti, positionné au 1/5<sup>e</sup> supérieur de la poutre. Le but n'est pas de rechercher le positionnement optimum du raidisseur, mais seulement de déterminer l'influence théorique et réelle de ce type de raidisseur.

2.1 - RAPPEL DES THEORIES CLASSIQUES DU VOILEMENT DANS LE DOMAINE ELASTIQUE -2.1.1. Théorie linéaire du voilement

La première étude théorique du voilement des plaques semble due à BRYAN (1888) Voir Réf. (1). De nombreux articles sur ce sujet ont suivi au début du 20ème siècle, mais c'est à TIMOSHENKO que l'on doit le plus dans ce domaine. Son ouvrage "Théorie de la stabilité élastique" fait encore autorité de nos jours. (Réf.2) De nombreux articles de cet auteur ont été publiés (Réf. 3) et ont fait progresser de manière très sensible la résolution des problèmes de stabilité élastique.

Ces recherches, basées sur la théorie linéaire des plaques parfaitement planes, nous indiquent sous quelle charge la plaque devient instable et tend à se cloquer. Cependant, la théorie linéaire n'est valable que pour des déplacements transversaux de la plaque faibles vis-à-vis de son épaisseur et de ce fait ne peut qu'analyser le début du phénomène réel. Cette indication de la valeur critique est cependant importante et nous l'utiliserons pour la détermination des charges ultimes que peut supporter la plaque.

La recherche de la valeur critique de voilement se fait habituellement à partir de deux méthodes :

- la méthode de l'énergie dite de RAYLEIGH-RITZ (Réf. 4) et dont de nombreuses applications ont été faites par TIMOSHENKO.

- la méthode d'analyse directe de la surface élastique de la plaque déformée, surtout utilisée pour les cas simples de voilement. Nous indiquerons au chapitre 3, une méthode de calcul basée sur cette analyse dans le cas plus complexe d'une plaque avec raidisseur longitudinal, chargée dans son plan par des forces de flexion et de cisaillement.

La détermination des contraintes critiques par la méthode de l'énergie a fait l'objet de nombreuses publications et on peut considérer que tous les cas de voilement sous les chargements classiques (flexion, compression, cisaillement...) ont été étudiés. Une excellente synthèse des résultats obtenus a été publiée par KLOPPPEL et SCHEER (Réf. 5).

Les résultats de ces études sont traduits sur des courbes donnant les coefficients de voilement  $k$ , en fonction du coefficient de forme de la plaque  $\alpha$  ( $\alpha = \frac{a}{b}$ ) (Voir Fig. 6). Les coefficients de voilement  $k_1$  pour le voilement sous charges de flexion,  $k_2$  sous charge de cisaillement, sont définis par :

$$k_1 = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_0} \quad k_2 = \frac{\tau_{cr}}{\tau_0}$$

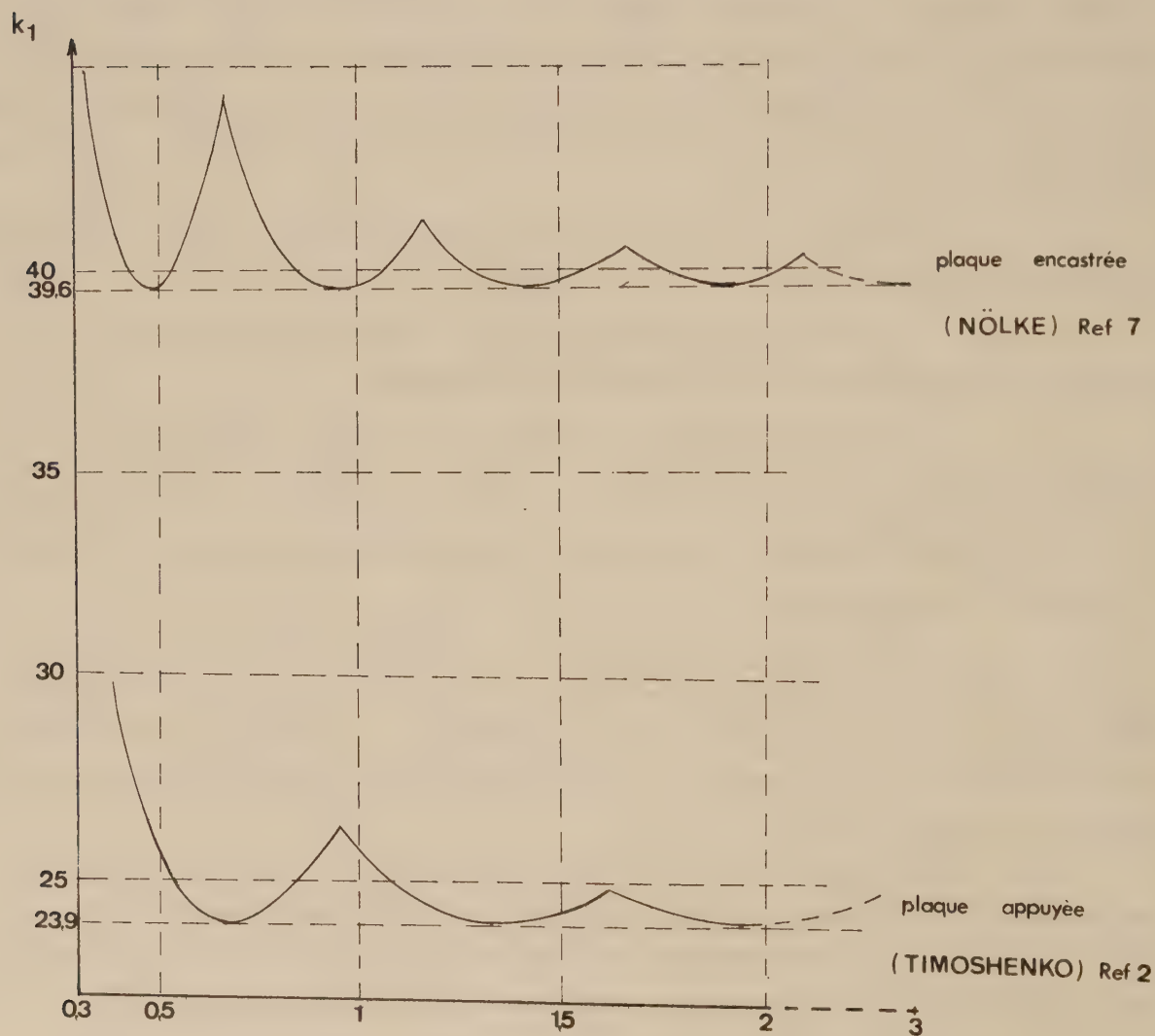
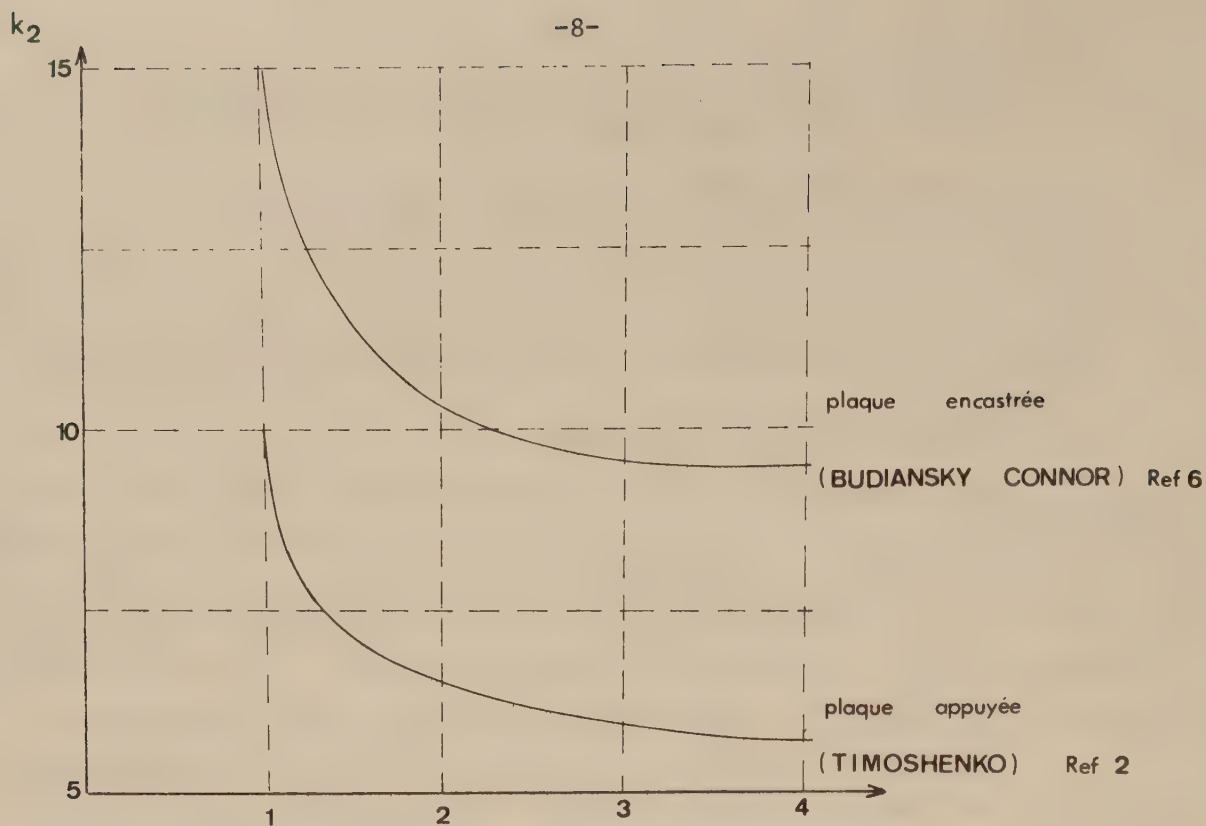


FIG 6 Valeurs des coefficients de voilement  $k_1$  et  $k_2$  en fonction de  $\alpha = \frac{a}{b}$

$\sigma_{cr}$  et  $\tau_{cr}$  désignant les contraintes critiques respectivement de flexion et de cisaillement.

$\sigma_o$  est la contrainte de référence faisant intervenir les divers paramètres de la plaque.

$$\sigma_o = \frac{\tau^2 D}{b^2 h}$$

Avec  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

et  $E$  = module d'Young du matériau constituant la plaque

$\nu$  = coefficient de Poisson du matériau constituant la plaque

Les paramètres de forme relatifs à la plaque sont définis sur la Fig. 7.

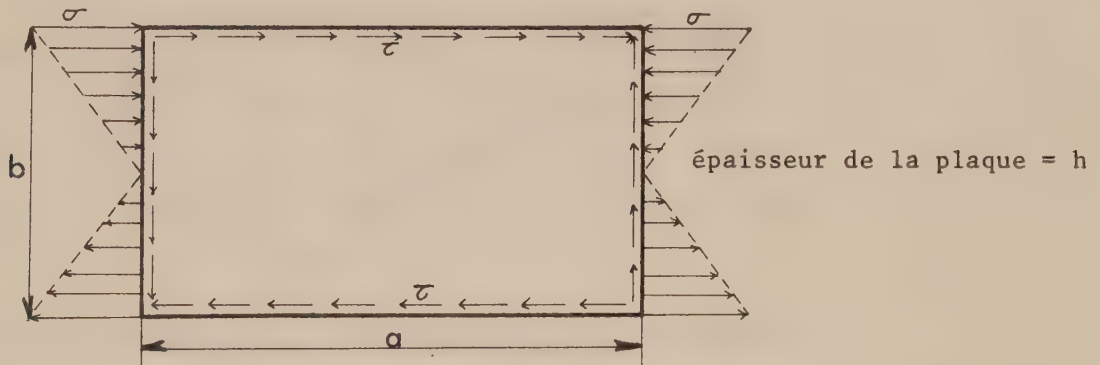


Fig 7

La détermination des valeurs de  $k_1$  et  $k_2$  a été faite pour le cas d'une plaque simplement appuyée sur 4 bords et pour une plaque encastree sur ses 4 bords. Dans la réalité, les plaques ont toujours un degré d'encastrement compris entre ces deux cas extrêmes et s'il est du côté de la sécurité de considérer le seul cas d'une plaque appuyée, il sera néanmoins intéressant de donner une limite supérieure des contraintes de voilement en utilisant l'hypothèse d'une plaque encastree sur ses 4 bords.

Lorsque la plaque est soumise simultanément a des contraintes de flexion et de cisaillement, on peut tracer dans un diagramme  $(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_o}, \frac{\tau_{cr}}{\tau_o})$  la courbe d'interaction entre les tensions critiques normales et tangentielles  $^{cr}$  qui agissant simultanément peuvent engendrer le voilement.

|               |   |   |   |   |   |                                                   |
|---------------|---|---|---|---|---|---------------------------------------------------|
| $\sigma_{cr}$ | : |   |   |   |   | contrainte critique de voilement due à la flexion |
| $\tau_{cr}$   | : | " | " | " | " | au cisaillement                                   |
| $\sigma_o$    | : | " | " | " | " | à la flexion agissant seule                       |
| $\tau_o$      | : | " | " | " | " | au cisaillement agissant seul                     |

Ce problème a été résolu par TIMOSHENKO et WAY (Réf. 8) dans le cas

d'une plaque simplement appuyée sur ses bords. Des courbes d'interaction, obtenues pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$  (voir Fig. 8), ils déduirent que l'on pouvait représenter l'interaction cisaillement-flexion par la formule :

$$\left( \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}^0} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{cr}}{\tau_{cr}^0} \right)^2 = 1 \quad (1)$$

Cette formule est une approximation, mais compte tenu des hypothèses de la théorie linéaire des plaques, on peut estimer que cette approximation est suffisamment précise pour les calculs.

Nous n'avons pas trouvé dans la bibliographie de solution à ce problème dans le cas d'une plaque encastree sur ses 4 bords.

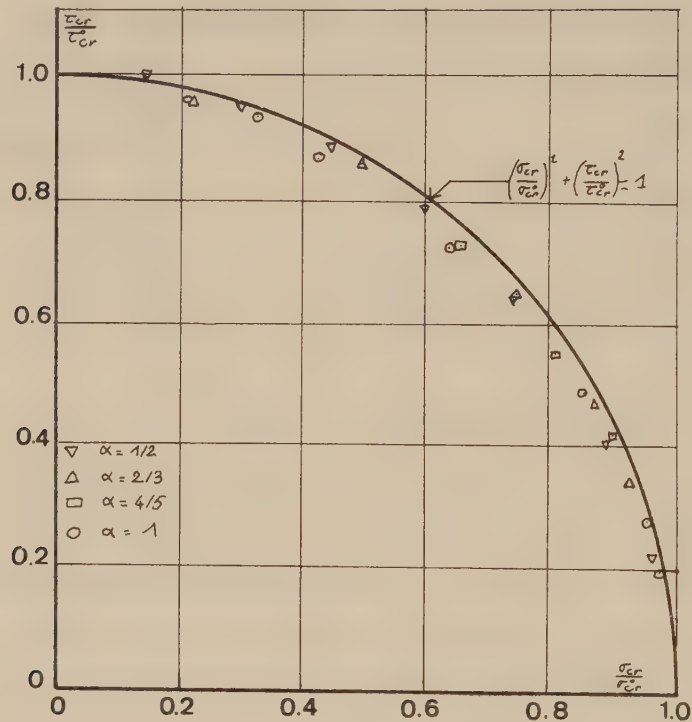


FIG. 8

### 2.1.2. Théorie linéaire appliquée aux plaques raidies

On peut par la méthode de l'énergie, déterminer les contraintes critiques de voilement pour une plaque raidie, sans difficulté particulière. Il suffit d'inclure dans les équations différentielles du voilement les termes correspondant aux caractéristiques des raidisseurs (positionnement, inertie, section). Chaque problème étant alors un cas particulier dépendant des caractéristiques du raidisseur, il est impossible de tracer des courbes présentant un caractère général comme celles tracées Fig. 6. A noter cependant, le grand nombre de cas traités par cette méthode par KLOPPEL et SCHEER (Réf. 5).

### 2.1.3. Théorie non linéaire des plaques

La théorie linéaire des plaques ne permet toutefois d'analyser que le début du phénomène du voilement. Cette insuffisance peut être partiellement comblée par l'analyse des grandes déformations des plaques.

Les plaques réelles sont imparfaites et présentent une certaine courbure initiale : cette courbure s'amplifie sous l'effet des efforts qui de plus, sont inévitablement appliqués avec une certaine excentricité. L'accroissement de cette courbure engendre des tensions dans le feuillet moyen que la théorie linéaire ignore et qui perturbent le phénomène expérimental.

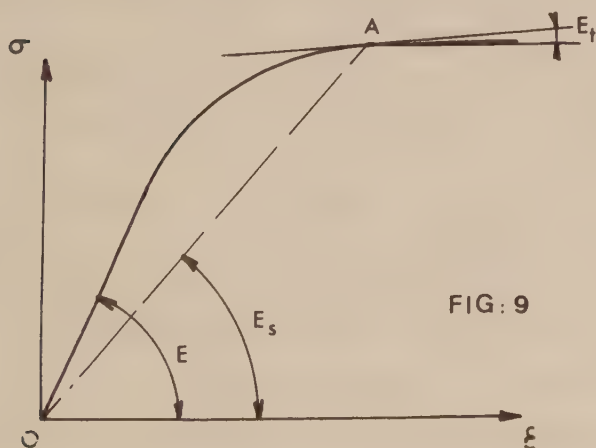
L'analyse des grandes déformations d'une plaque fait appel aux équations de KARMAN (Réf. 9) qui font intervenir une fonction de tension d'AIRY caractérisant l'état de tension de membrane existant dans le plan moyen de la plaque.

Outre la difficulté d'intégration des équations non linéaires de KARMAN, cette méthode est très spécifique : la détermination des constantes nécessite en effet la connaissance précise de la déformée initiale de la plaque. Par ailleurs, les conditions au contour de l'âme jouent un rôle important dans son comportement. Il ne semble donc pas facile de déduire de cette analyse des conclusions générales sur le phénomène du voilement.

## 2.2 - THEORIES CLASSIQUES DU VOILEMENT DANS LE DOMAINE PLASTIQUE -

Les valeurs critiques obtenues par la théorie linéaire des plaques ne sont valables que tant que  $\tau_{cr}$  ou  $\sigma_{cr}$  restent inférieures à la limite élastique du matériau. S'il n'en n'est pas ainsi, on est amené à utiliser certaines théories que nous nous contenterons de citer et de comparer dans cet exposé.

### 2.2.1. Généralités sur ces théories



Dès que la tension critique  $\sigma_{cr}$  ou  $\tau_{cr}$  dépasse la valeur correspondant à la limite de proportionnalité en compression du matériau, le voilement est accompagné de déformations plastiques. Plusieurs théories du voilement plastique ont été proposées notamment par BIJLAARD (Réf. 10-11), ILLIOUSHINE (Réf. 12) STOWELL (Réf. 13) ENGESSER-KARMAN (Réf. 15-16) BLEICH (Réf. 17).

Toutes ces théories se basent sur le diagramme tensions-dilatations du matériau.

Sur ce diagramme (Fig. 9) on peut définir pour chaque point de la courbe, outre le module habituel d'élasticité  $E$ , un module tangent  $E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$  et un module

$$\text{sécant } E_s = \frac{\sigma}{\epsilon}.$$

La théorie et l'expérience montrent que la charge critique de voilement est réduite dans une proportion qui va de  $\frac{E_s}{E}$  à  $\frac{E_t}{E}$  selon le problème envisagé.

### 2.2.2. Etude de la théorie d'ILLIOUSHINE (Réf. 12)

ILLIOUSHINE base sa solution du problème du voilement plastique sur le fait que dans l'état naissant du voilement, une certaine zone sur le côté concave de la plaque fléchie est en état plastique de déformation tandis que la partie convexe de la plaque se comporte élastiquement. Le phénomène de voilement se produit donc par bifurcation de l'état d'équilibre. Pour écrire la condition d'équilibre d'un élément de plaque dans la zone plastique, il introduit dans son analyse, l'hypothèse de plasticité de HUBER, VON MISES et HENCKY qui considèrent un comportement isotropique du matériau. ILLIOUSHINE considère qu'à cet état, le matériau est incompressible, ce qui revient à écrire  $\nu = 0,5$ . Il semble que la théorie d'ILLIOUSHINE ne donne pas de résultats concordants avec l'expérience.

STOWELL (Réf. 13) modifie en la simplifiant, la théorie d'ILLIOUSHINE, en se basant sur le concept de SHANLEY (Réf. 14) qui exprime que dans un état de compression uniforme, lorsque l'on dépasse la limite élastique, le flambage s'accroît en même temps que la charge sans qu'il apparaisse de renversement du sens des déformations nulle part dans la pièce. STOWELL prend aussi un coefficient de POISSON égal à 0,5, mais l'influence d'une erreur sur  $\nu$  est partiellement éliminée au moyen de l'artifice suivant : pour calculer  $\sigma_{cr}$  dans le domaine plastique, nous multiplierons la contrainte critique utilisée pour le flambage élastique par un facteur  $\eta$ , appelé facteur de plasticité. Les valeurs de  $\eta$  sont obtenues par division de la contrainte trouvée pour la plaque en état plastique par la contrainte critique calculée avec l'hypothèse d'un état parfaitement élastique mais avec  $\nu = 0,5$  au lieu de 0,3 (dans le cas de l'acier). Le quotient  $\eta$  de ces deux contraintes critiques peut être considéré comme étant seulement peu affecté par une erreur sur la valeur de  $\nu$ .

Pour un état uniforme de contrainte, cisaillement pur ou compression simple, il semble que les valeurs de  $\eta$  ainsi obtenues soient proches du rapport  $\frac{E_s}{E}$ . Cela revient à dire que pour calculer la contrainte critique  $\sigma_{cr}$  dans le domaine plastique, il suffira d'utiliser  $E_s$  au lieu de  $E$ . Les expériences effectuées au Laboratoire de LANGLEY semblent être en accord avec cette théorie.

Toutefois, pour diverses conditions d'appuis, cette valeur de  $\eta = \frac{E_s}{E}$  doit être corrigée par un facteur faisant intervenir le module tangent. Pour une plaque ayant ses deux côtés non chargés agrafés, la valeur de  $\eta$  proposée par STOWELL s'écrit :

$$\eta = \frac{E_s}{E} \left[ 0,352 + 0,648 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{E_t}{E}} \right] \quad (2)$$

Pour une plaque ayant ses deux côtés non chargés simplement appuyés la valeur de  $\eta$  s'écrit :  $\eta = \frac{E_s}{E} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{E_t}{E}} \right)$  (3)

### 2.2.3. Etude de la théorie d'ENGESSER-KARMAN (Réf. 15-16)

Cette théorie se rapproche de celle d'ILLIOUSHINE en ce sens qu'elle considère deux comportements différents du matériau, dans la zone concave et dans la zone convexe.

Si sur le diagramme déformations-tensions (Fig. 10) on définit le point C représentant l'état critique de voilement, la relation entre la contrainte et la déformation à la partie concave de la poutre est caractérisée par la pente de la tangente CC', c'est-à-dire, par le module tangent  $E_t$ . Du côté convexe, la relation est définie par la pente de la droite CC', c'est-à-dire, par le module d'Young.

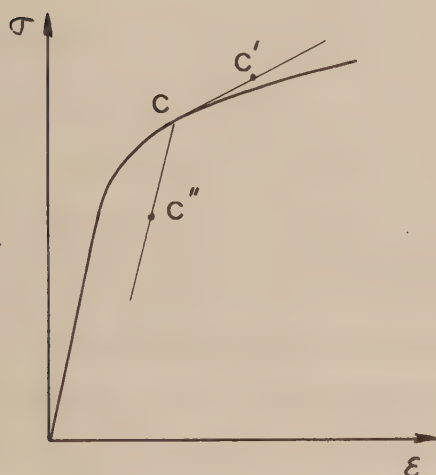


FIG:10

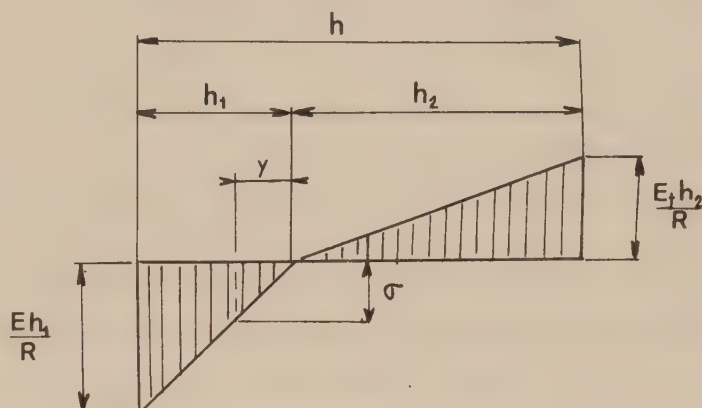


FIG:11

Si nous supposons que les sections restent planes pendant la flexion, les petites tensions de flexion seront réparties le long de la profondeur de la section comme indiqué sur la Fig. 11. En effet :

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y$$

$$\rightarrow \sigma = EI \frac{d^2 y}{dx^2} = Ey \cdot \frac{1}{R}$$

avec  $R$  = rayon de courbure  
de la plaque suivant  $x$

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

On trouvera la position de l'axe neutre par la condition que les résultantes des forces d'extension et de compression sont égales :

$$E h_1^2 = E_t h_2^2$$

$$\text{et comme } h_1 + h_2 = h \rightarrow h_1 = \frac{h \sqrt{E_t}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}} \quad h_2 = \frac{h \sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}$$

Le moment fléchissant représenté par les tensions indiquées sur la Fig. 11 peut s'exprimer par :

$$M = \frac{E h_1}{R} \cdot \frac{h_1}{2} \cdot \frac{2}{3} h = \frac{h^3}{12} \times \frac{4 E \cdot E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \text{ et en posant}$$

$$E_r = \frac{4 E \cdot E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \quad (4)$$

on est ramené à une expression de la forme  $\frac{M}{E_r I} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ . C'est donc cette expression

de  $E_r$  que nous utiliserons à la place de  $E$  dès que la contrainte maxi aura atteint la limite de proportionnalité.

#### 2.2.4. Etude de la théorie de BLEICH

BLEICH considère que lorsque la contrainte  $\sigma_x$  excède la limite de proportionnalité, le module tangent  $E_t$  est seul valable pour traduire la relation contrainte-déformation suivant l'axe des  $x$ , alors que le module  $E$  reste valable suivant l'axe des  $y$  puisque  $\sigma_y = 0$ . Nous aurons donc à considérer un comportement anisotrope de la plaque lorsque la contrainte critique atteindra la limite élastique. Ce point de vue fut discuté par certains chercheurs tels ROS et EICHINGER (Réf. 18) qui faisaient valoir que la déformation plastique d'un matériau est isotropique et qu'un état de contrainte dépassant la limite élastique dans une direction produisait un "écoulement" dans toutes les autres directions. Notons que de nombreux résultats expérimentaux ont vérifié les prévisions théoriques de BLEICH.

L'équation différentielle de la déformée d'une plaque sans raidisseur soumise à l'action d'une contrainte  $\sigma_x$  se déduit de l'équation générale du voilement avec  $\sigma_y$  et  $\tau = 0$ . Il vient

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = h \sigma_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5)$$

Le terme  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$  correspond à la flexion des bandes parallèles à l'axe des  $x$ . Puisque ces bandes sont soumises à la force longitudinale  $\sigma_x h$ , le module  $E_t$  doit être substitué à  $E$  lorsque  $\sigma_x$  excède la limite élastique. Nous poserons que  $\mu = \frac{E_t}{E}$  avec  $E_t$  module tangent, traduisant (dans l'hypothèse de BLEICH) le comportement du matériau, dans le domaine plastique. Cela revient en conservant  $D$  en facteur à écrire le terme  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$  avec un facteur correctif  $\mu$ . Le terme  $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$  représente la flexion des

bandes parallèles à y. Puisque  $\sigma_y = 0$ , les bandes ne sont soumises à aucune contrainte et le module E conserve sa valeur, donc, pas de terme correctif pour  $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ .

Le terme  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2}$  est associé à la distorsion d'un élément de plaque carrée due

aux moments de torsion engendrés par les cisaillements agissant sur cet élément. Puisque les caractéristiques élastiques ou plastiques dans la direction des 2 axes x et y affectent ce terme, nous introduirons un facteur correctif dont la valeur sera comprise entre 1 et  $\mu$ . Nous prendrons arbitrairement la valeur  $\sqrt{\mu}$ . L'équation différentielle de la déformée s'écrit donc :

$$D \left( \mu \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \sqrt{\mu} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \sigma_x \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (6)$$

Pour calculer la charge critique  $\sigma_{cr}$  à partir de cette équation, on procède comme pour l'équation générale dans le domaine élastique. On obtient des expressions de  $\sigma_{cr}$  de la forme :

$$\sigma_{cr} = D \cdot \sqrt{\mu} \cdot k \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^2 \quad (7)$$

k étant le coefficient de voilement déterminé à partir des abaques utilisés dans l'hypothèse d'un matériau à élasticité illimitée (voir Fig. 6). Dans le domaine plastique,  $\mu$  qui dépend de  $\sigma_{cr}$  est une quantité inconnue du calcul et une méthode par tâtonnements sera nécessaire pour déterminer  $\sigma_{cr}$ . Ceci peut être évité en écrivant l'équation (7) sous la forme :

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sqrt{\mu}} = D \cdot k \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^2 \quad (8)$$

On pourra, en effet, pour un matériau donné, établir à l'avance des tables donnant  $\sigma_{cr}$  en fonction de  $\frac{\sigma_{cr}}{\sqrt{\mu}}$ . Nous désignerons par  $\eta$ , facteur de plasticité, la valeur de  $\sqrt{\mu}$ .

#### 2.2.4.1. Application aux plaques soumises à la flexion pure

Il n'y a pas eu, à notre connaissance, d'étude faite pour déterminer la valeur du facteur de plasticité dans le cas d'une distribution non uniforme de contraintes ( $\eta$  varie de 1 à la fibre neutre, jusqu'à  $\sqrt{\mu}$  sur les fibres extrêmes). On se place du côté de la sécurité en utilisant  $\eta = \sqrt{\mu}$  pour toutes les fibres. N'ayant pas de meilleurs résultats à utiliser, nous écrirons donc :

$$\frac{\sigma_{1cr}}{\sqrt{\mu}} = D \left(\frac{h}{b}\right)^2 k_1 \quad (9)$$

#### 2.2.4.2. Application aux plaques soumises à un effort tranchant pur

L'équation (6) a été établie en tenant compte d'une anisotropie apparente de la plaque lorsque  $\sigma_x$  dépasse la limite élastique. Des conditions tout à fait différentes existent cependant dans une plaque soumise au cisaillement pur. Les contraintes principales correspondant à cet état de contrainte  $\sigma_I = -\sigma_{II} = \tau$  sont semblables et il apparaît qu'un comportement isotropique de la plaque dans le domaine plastique soit une hypothèse raisonnable. Appliquant un critère de plasticité, nous pourrions alors exprimer la contrainte équivalente.

Le choix du critère de VON MISES conduit à une expression de la forme :

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau^2}$$

soit dans le cas de cisaillement :

$$\sigma_i = \sqrt{3} \cdot \tau \quad (10)$$

Nous avons donc :

$$\frac{\sigma_i}{\sqrt{\mu}} = D \cdot 3 \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^2 \cdot k_2 \quad (11)$$

Nous en déduirons  $\sigma_i$  par lecture sur les tables  $\left(\frac{\sigma_i}{\sqrt{\mu}} \rightarrow \sigma_i\right)$  établies d'après les caractéristiques du matériau. Enfin, nous déterminerons  $\tau_{cr}$  à partir de l'équation (10).

#### 2.2.5. Comparaison des diverses théories du voilement plastique

Une comparaison des diverses théories du voilement plastique a été faite expérimentalement sur des alliages d'aluminium au Laboratoire de LANGLEY. De cette étude, il résulte que :

- le facteur de plasticité  $\eta = \frac{E_t}{E}$  est le mieux approprié pour traduire le comportement dans le domaine plastique des sections massives (Poutres, colonnes).
- le facteur de plasticité  $\eta = \frac{E_s}{E}$  est le mieux approprié pour traduire le comportement des plaques longues.

Il peut être intéressant de comparer les diverses valeurs des coefficients de plasticité sur un diagramme. En utilisant les valeurs fournies par BLEICH (Réf. 17) relatives à un alliage d'aluminium, cette comparaison peut se faire à l'aide des courbes de la Fig. 12. On remarque que toutes les valeurs de  $\eta$  sont comprises entre les valeurs extrêmes  $\eta = \frac{E_s}{E}$  et  $\eta = \frac{E_t}{E}$ . Le choix d'une théorie du voilement plastique et par conséquent, d'un facteur de plasticité reste donc conditionné par des exigences plus ou moins grandes vis-à-vis de la sécurité.

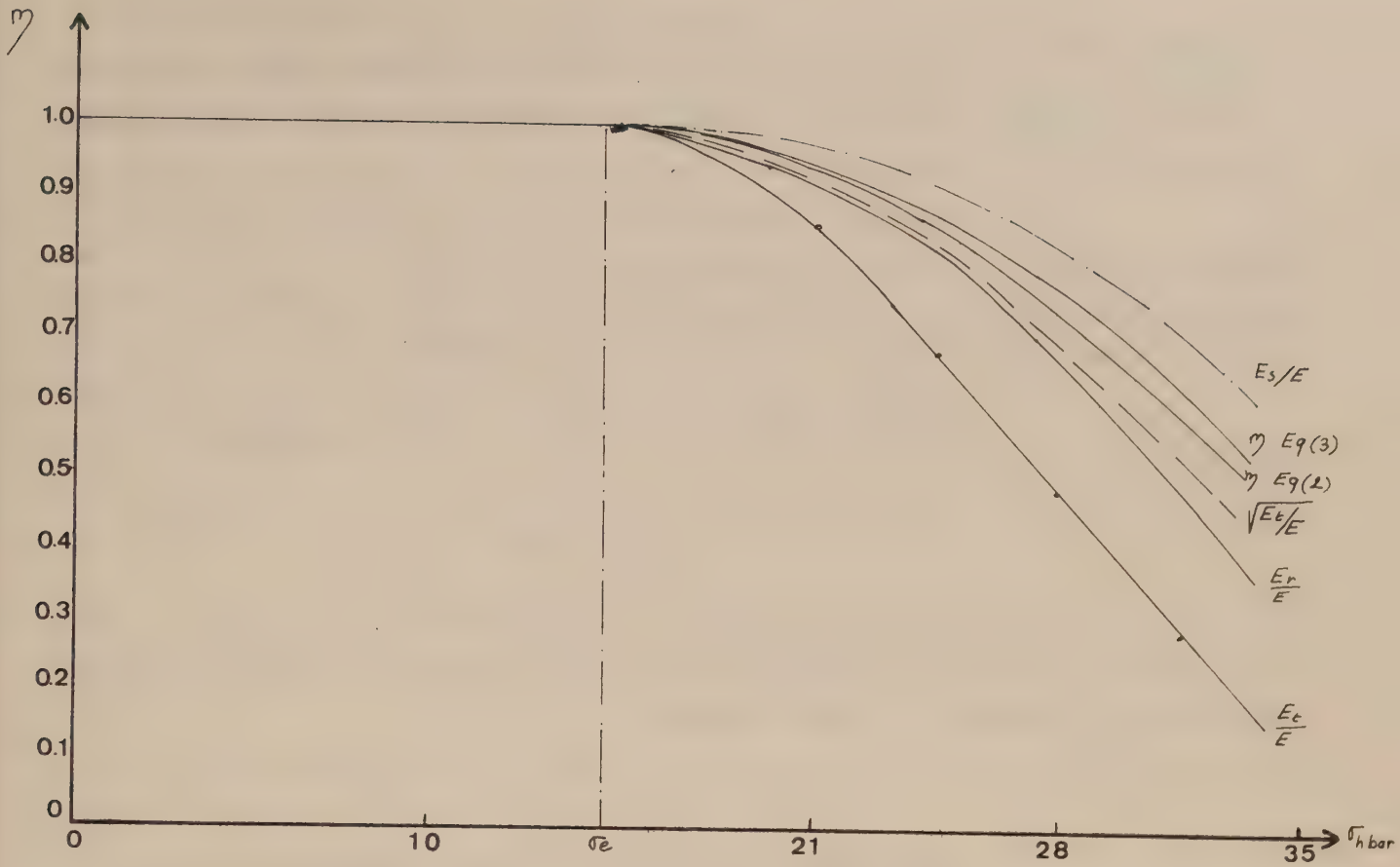


FIG.12 COMPARAISON DES FACTEURS DE PLASTICITÉ

### 2.3 - THEORIE DE BASLER SUR LE COMPORTEMENT DES POUTRES DROITES PLANES -

La définition d'une charge critique de voilement à partir de la théorie linéaire des plaques ne semblant pas être un paramètre suffisant pour caractériser le comportement d'une poutre plane, BASLER et THURLIMAN (Réf. 19-20) ont élaboré une théorie à partir de laquelle il semble possible de déterminer la charge ultime que peut supporter une telle poutre.

#### 2.3.1. Poutre plane soumise à l'effort tranchant pur

##### 2.3.1.1. Généralités

L'hypothèse fondamentale de la théorie de BASLER et THURLIMAN est de considérer que jusqu'à une certaine valeur du cisaillement, les contraintes sur un élément de la plaque se traduisent par un tenseur correspondant au cisaillement pur. En état plan, nous avons donc le tenseur :

$$\begin{vmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{vmatrix}$$

On peut noter que l'existence d'un effort tranchant impliquant nécessairement la présence d'un moment de flexion  $dM = -T dx$ , il se superpose en toute rigueur au tenseur cisaillement un tenseur correspondant aux contraintes dues

à la flexion. Dans ce qui suit, nous supposons que l'effet de ces contraintes vis-à-vis du comportement d'un panneau de poutre plane est faible par rapport à l'effet des contraintes de cisaillement, et nous négligerons le tenseur des contraintes de flexion.

A partir d'une certaine valeur du cisaillement correspondant à la valeur théorique ( $\tau_{cr}$ ) pour laquelle le voilement apparaît, il se superpose au tenseur cisaillement pur, un champ de contraintes de traction qui améliore la résistance de la plaque en développant une force de post-voilement.

La valeur théorique  $\tau_{cr}$  est celle que l'on obtient par la théorie linéaire des plaques (voir § 2.1.1.) et que l'on peut exprimer sous la forme:

$$\tau_{cr} = k_2 \cdot \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \quad (12)$$

Dans ce calcul de  $\tau_{cr}$  il est fait l'hypothèse que les cisaillements se répartissent uniformément sur les côtés de la plaque. La force de cisaillement que peut encaisser la plaque est donc :

$$T_\tau = \tau_{cr} \times b \times h \quad (13)$$

BASLER fait l'hypothèse que l'effort tranchant ultime que la poutre peut encaisser est la somme de l'effort tranchant correspondant à l'apparition du cisaillement critique  $\tau_{cr}$  et de la composante verticale du champ de tension :

$$T_u = T_\tau + T_\sigma \quad (14)$$

### 2.3.1.2. Détermination de l'inclinaison du champ de tension

A partir du moment où  $\tau$  atteint la valeur de  $\tau_{cr}$ , il se développe dans la plaque des tensions. Dans l'hypothèse où les côtés de la plaque ne peuvent se déplacer, on obtient une configuration du type représenté sur la Fig. 13.

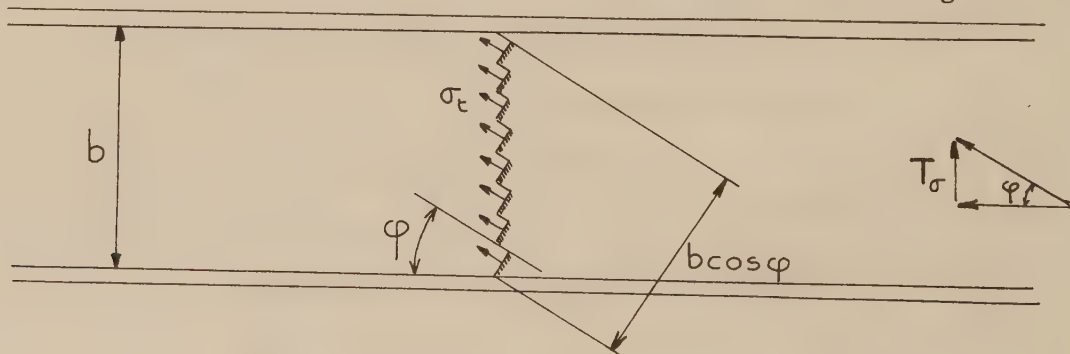


FIG : 13

L'effort tranchant dû à la présence du champ de tension a pour expression :

$$T_\sigma = \sigma_t \cdot b \cdot h \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi \quad (15)$$

Dans le cas où les membrures et les raidisseurs d'âme constituent des appuis suffisamment rigides et de raideur équivalente, ils permettent un développement uniforme du champ de contraintes  $\sigma_t$  dans la hauteur de l'âme et par suite l'inclinaison des contraintes ( $\sigma_t$ ) sur l'axe longitudinal de la pièce est  $\frac{\pi}{4}$ . (Correspondant à un effort tranchant  $T_\sigma$  maximum égal à  $\frac{1}{2} \sigma_t b \cdot h$ .)

Dans le cas où les grands côtés de la plaque peuvent se déplacer, les petits côtés étant rigides, il se développe encore un champ de contraintes qui prend naissance aux points "durs" de la pièce. L'inclinaison du champ de contraintes n'est plus  $45^\circ$  mais un angle  $\phi$  que BASLER a déterminé.

Les contraintes  $\sigma_t$  prennent naissance à l'intérieur d'une bande diagonale d'inclinaison  $\phi$  et se développent progressivement à partir de cette bande sur toute la hauteur  $b$  de l'âme.

L'inclinaison  $\phi$  est telle qu'elle rend maximum l'accroissement  $\Delta T_\sigma$  de l'effort tranchant. Au moment de la naissance du champ, on pourra écrire :

$$\Delta T_\sigma = \sigma_t \cdot s \cdot h \cdot \sin \phi \quad (16)$$

avec  $s$  = largeur de la bande au moment où se développent les tensions  $\sigma_t$  (voir Fig.14)

$$s = b \cos \phi - a \sin \phi \quad (17)$$

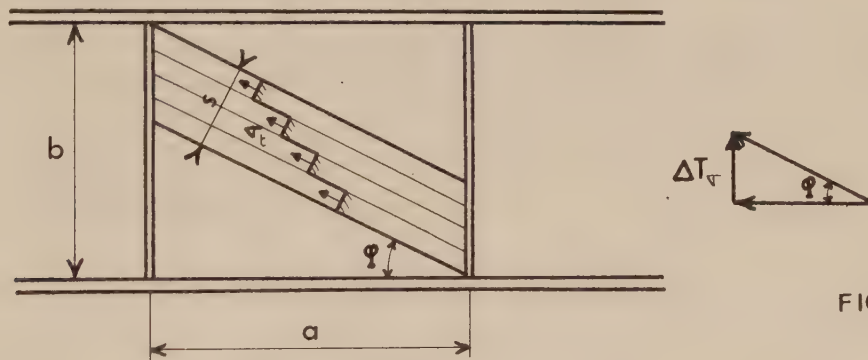


FIG : 14

$$\Delta T_\sigma = \sigma_t (b \cos \phi - a \sin \phi) \cdot h \cdot \sin \phi$$

En différenciant par rapport à  $\phi$  et égalant à 0 l'expression obtenue, il vient :

$$b \cdot \text{tg}^2 \phi + 2a \cdot \text{tg} \phi - b = 0 \quad (18)$$

$$\text{d'où} \quad \phi = \text{arc tg} \left( \sqrt{1 + \alpha^2} - \alpha \right) \quad (19)$$

### 2.3.1.3. Détermination de la composante verticale $T_\sigma$ du champ de tension

Dans la théorie de BASLER, la détermination de  $T_\sigma$  est faite de manière simple en étudiant non pas une seule plaque mais deux plaques identiques séparées par un raidisseur (Fig. 15-16).

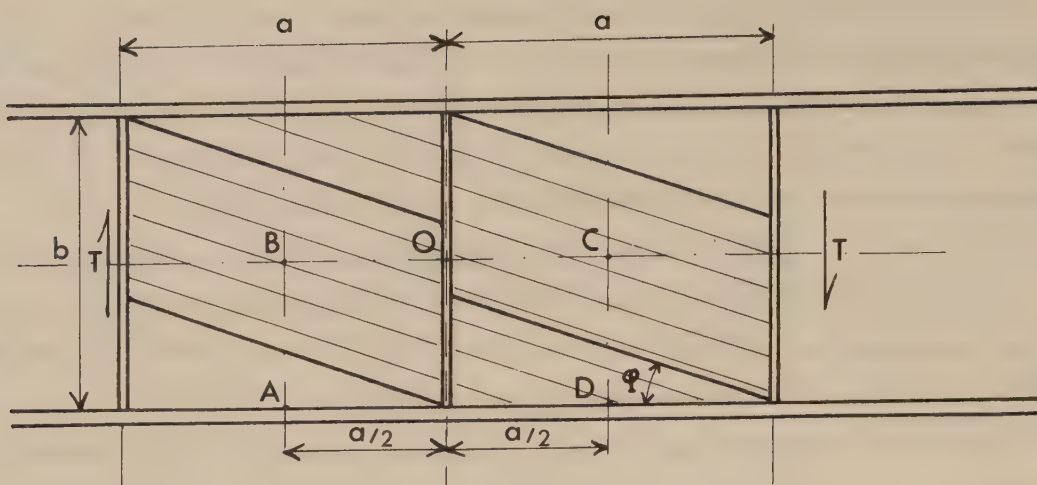


FIG: 15

Considérons l'équilibre de l'élément ABCD

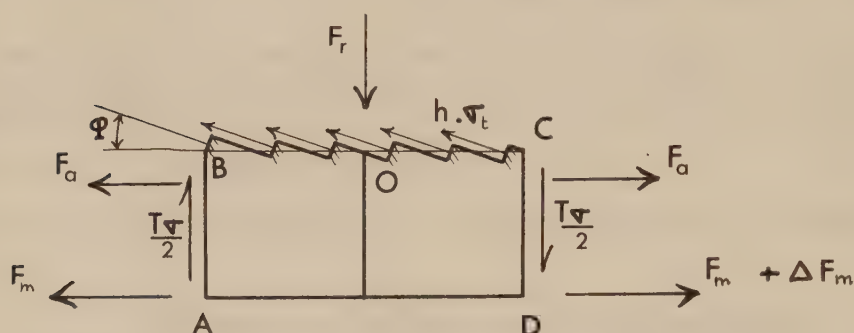


FIG: 16

La projection des forces sur un axe horizontal permet de déduire :

$$\Delta F_m = \sigma_t \cdot h \cdot a \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi = \sigma_t \cdot \frac{h \cdot a \cdot b}{2 \sqrt{1+\alpha^2}} \quad (20)$$

Le moment des forces par rapport au point O nous permet de déduire :

$$T_\sigma = \frac{b}{a} \cdot \Delta F_m = \sigma_t \cdot \frac{h \cdot b}{2 \sqrt{1+\alpha^2}} \quad (21)$$

L'expression de  $T_\sigma$  étant une fonction de  $\sigma_t$  il reste à définir une limite maximum à  $\sigma_t$ .

#### 2.3.1.4. Valeur limite de $T_\sigma$

Pour définir une valeur limite à la contrainte de traction  $\sigma_t$  qui peut se développer dans la plaque, BASLER utilise la condition d'écoulement plastique de VON MISES.

La superposition du champ de tension au tenseur du cisaillement engendre sur un élément de plaque des contraintes  $\sigma_u$ ,  $\sigma_v$  et  $\tau_{uv}$  que l'on peut aisément calculer par la construction de Mohr (voir Fig. 17).

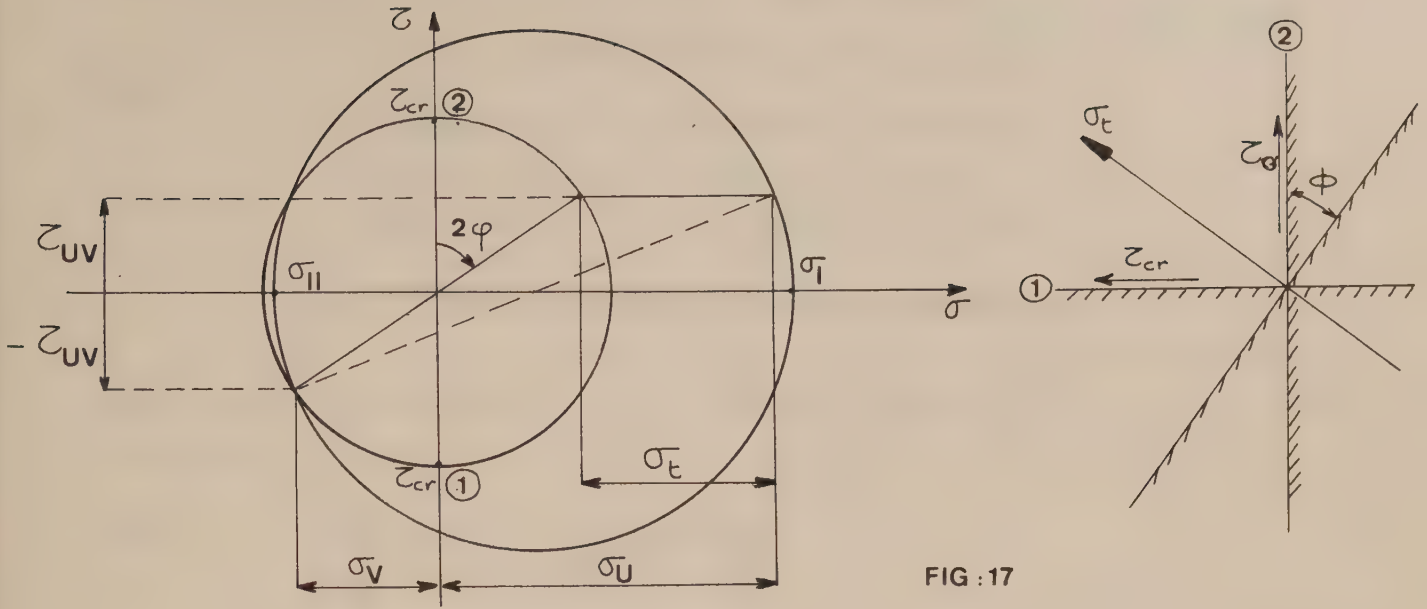


FIG : 17

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= (\tau_{cr} \sin 2\phi + \sigma_t) \\ \sigma_v &= -\tau_{cr} \sin 2\phi \\ \tau_{uv} &= \tau_{cr} \cos 2\phi \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Le critère de VON MISES permet d'écrire :

$$\sigma_u^2 + \sigma_v^2 - \sigma_u \cdot \sigma_v + 3 \tau_{uv}^2 = \sigma_e^2 \quad (24)$$

et en utilisant les expression (23) de  $\sigma_u$ ,  $\sigma_v$  et  $\tau_{uv}$  il vient :

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_e} = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau_{cr}}{\sigma_e}\right)^2 \left\{ \left[\frac{3}{2} \sin 2\phi\right]^2 - 3 \right\}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\tau_{cr}}{\sigma_e} \cdot \sin 2\phi \quad (25)$$

Afin de simplifier cette expression BASLER fait deux hypothèses supplémentaires.

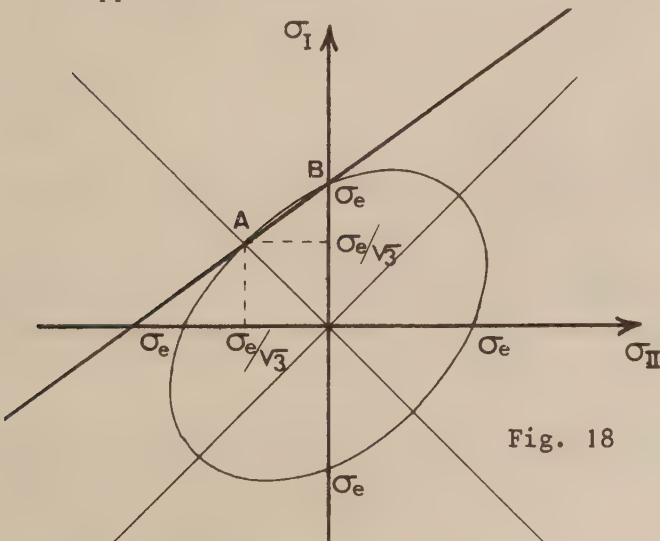


Fig. 18

1 - Il substitue à l'ellipse définissant l'état limite du critère de VON MISES dans la région AB (Fig. 18) un segment de droite d'équation :

$$\sigma_I = \sigma_e + (\sqrt{3} - 1) \cdot \sigma_{II}$$

2 -  $\phi$  est posé égal à  $45^\circ$

Les équations (23) s'écrivent alors :

$$\sigma_u = \sigma_I = \tau_{cr} + |\sigma_t| \quad (27)$$

$$\sigma_v = \sigma_{II} = -\tau_{cr}$$

Les équations (26) et (27) permettent d'écrire :

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_e} \approx 1 - \frac{\sqrt{3} \cdot \tau_{cr}}{\sigma_e} \quad (28)$$

$$\text{d'où } T_\tau = \left[ 1 - \sqrt{3} \cdot \frac{\tau_{cr}}{\sigma_e} \right] \cdot \frac{\sigma_e \cdot h \cdot b}{2 \sqrt{1+\alpha^2}} \quad (29)$$

#### 2.3.1.5. Expression de l'effort tranchant ultime

$$T_u = T_\tau + T_\sigma = \tau_{cr} \cdot bh + \left( 1 - \sqrt{3} \cdot \frac{\tau_{cr}}{\sigma_e} \right) \cdot \frac{\sigma_e \cdot h \cdot b}{2 \sqrt{1+\alpha^2}} \quad (30)$$

Il est commode de rendre non dimensionnelle l'expression de  $T_u$ . Pour cela, on définit l'effort tranchant  $T_p$  correspondant à l'entrée en phase plastique des contraintes de cisaillement.

$$T_p = \tau_e \cdot b \cdot h \quad (31)$$

$$\text{Avec le critère de VON MISES : } \tau_e = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} \quad (32)$$

$$\text{d'où } T_p = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} \cdot b \cdot h \quad (33)$$

L'expression de  $\frac{T_u}{T_p}$  s'écrit alors :

$$\frac{T_u}{T_p} = \frac{\tau_{cr}}{\tau_e} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 - \frac{\tau_{cr}}{\tau_e}}{\sqrt{1+\alpha^2}} \quad (34)$$

Expression valable pour  $\tau_{cr} < \tau_e$ . Pour  $\tau_{cr} > \tau_e$ , BASLER considère que le champ de tension ne peut se développer et donne pour expression de  $\frac{T_u}{T_p}$  en phase plastique.

$$\frac{T_u}{T_p} = \frac{\tau_{cr}}{\tau_e} \quad (\tau_{cr} > \tau_e) \quad (35)$$

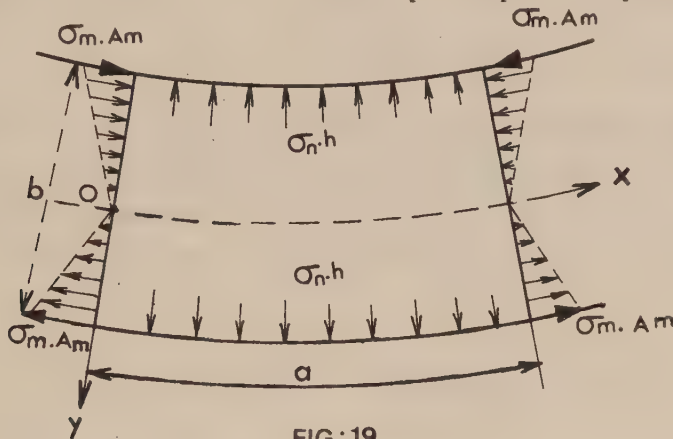
### 2.3.2. Poutre plane soumise à la flexion pure

BASLER étudie les trois modes de rupture d'une poutre droite à âme pleine :

- Flambage vertical de la membrure comprimée
- Flambement latéral de la membrure comprimée
- Instabilité en torsion de la membrure plane

#### 2.3.2.1. Flambage vertical de la semelle comprimée

Sous l'action d'un moment de flexion, appliqué au panneau de poutre plane, il se développe des contraintes uniformément réparties sur les côtés non chargés en raison de la courbure prise par les panneaux (voir Fig. 19).



$A_m$  = aire de la section droite de la membrure.  
 $A_a$  = aire de la section droite de l'âme  
 $h$  = épaisseur de l'âme

FIG:19

$$\text{A partir de } \frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$\text{et } \frac{M}{I} \times y = \sigma \rightarrow \frac{M}{I} \times \frac{b}{2} = \sigma_m$$

$$\text{il vient : } \frac{1}{R} = \frac{2 \epsilon_m}{b} \quad (36)$$

En projetant l'équilibre des forces s'exerçant sur la semelle comprimée

$$\sigma_n \cdot h \cdot a - \sigma_m \cdot A_m \cdot \frac{2 \epsilon_m}{b} \cdot a = 0$$

$$\sigma_n = \frac{A_m}{A_a} \cdot 2 \sigma_m \cdot \epsilon_m \quad (37)$$

BASLER considère qu'une première forme d'instabilité peut apparaître lorsque  $\sigma_n$  atteint la contrainte critique d'Euler pour un élément de plaque éloigné des appuis. Pour un élément de plaque, cette contrainte critique s'écrit :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{h^2}{b^2} \quad (38)$$

Pour éviter un flambage vertical de la semelle comprimée, il convient que :

$$\sigma_n < \sigma_{cr}$$

En utilisant les équations (37) et (38), cette inégalité conduit :

$$\frac{b}{h} < \sqrt{\frac{\pi^2 E}{24(1-\nu^2)} \cdot \frac{A_a}{A_m} \cdot \frac{l}{\sigma_m \cdot \epsilon_m}} \quad (39)$$

Le cas limite de cette expression correspond à  $\sigma_m = \sigma_e$ . Pour atteindre cette valeur, il convient que la déformation  $\epsilon_m$  soit plus grande que  $\epsilon_e = \frac{\sigma_e}{E}$  du fait de la présence des contraintes résiduelles. Il faut pour cela que :

$$\epsilon_m - \epsilon_r = \epsilon_e$$

$$\epsilon_m = \epsilon_e + \epsilon_r = \frac{\sigma_e + \sigma_r}{E} \quad (40)$$

BASLER considère que le rapport  $\rho = \frac{A_a}{A_m}$  est toujours supérieur à 0,5. Dans le but de prescrire une limite supérieure du rapport  $b/h$  applicable à l'intérieur du domaine pratique de calcul, la valeur  $\rho = 0,5$  sera utilisée dans l'inéquation (39). Pour un matériau de coefficient de Poisson 0,3, cette inégalité devient alors :

$$\frac{b}{h} < \frac{0,48 \cdot E}{\sqrt{\sigma_e(\sigma_e + \sigma_r)}} \quad (41)$$

#### 2.3.2.2. Flambage latéral de la semelle comprimée

Le moment critique provoquant le déversement d'une poutre est défini par TIMOSHENKO (Réf. 3).

$$M_{cr} = \sqrt{\frac{\pi^2 E I_y \cdot G J}{l^2} + \frac{\pi^4 \cdot E I_y \cdot E I_\omega}{l^4}} \quad (42)$$

Cette formule fait intervenir la rigidité à la torsion et la rigidité au gauchissement.

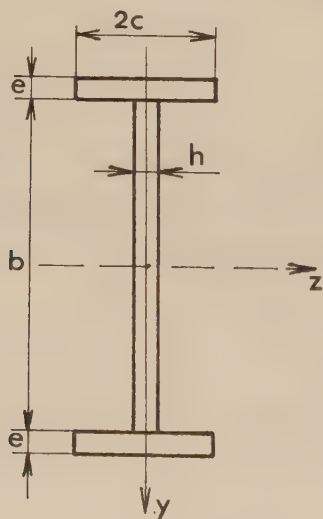


FIG: 20

$E \cdot I_y$  = raideur de flexion dans le plan  $G.x.z$

$$I_y = \frac{2}{3} \cdot A_m \cdot c^2$$

$G \cdot J$  = raideur de torsion uniforme

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$J$  = constante de torsion

$$= \frac{1}{3} (2 \cdot c \cdot e^3 + b h^3 + 2 c e^3)$$

$E I_\omega$  = raideur de gauchissement

$I_\omega$  = constante de gauchissement

$$= \frac{1}{4} \cdot I_y \cdot b^2$$

Pour le calcul de la contrainte critique correspondant au déversement, BASLER considère que la distribution de contraintes dans une section sous l'action du moment appliqué est linéaire. C'est une approximation, puisque expérimentalement, ce fait n'est pas vérifié pour les structures à haut coefficient de finesse, mais l'incidence de la résistance de l'âme vis-à-vis de la charge ultime est faible et cette hypothèse de linéarité est justifiée. Ecrivons que l'apparition de  $\sigma_{cr}$  dans la semelle supérieure correspond au moment critique en appliquant le principe de l'équivalence :

$$2 \sigma_{cr} \times A_m \times \frac{b}{2} + \sigma_{cr} \times A_a \times \frac{b}{6} = M_{cr}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{M_{cr}}{A_m \cdot b \left[ 1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{A_a}{A_m} \right]} \quad (43)$$

Utilisant les expressions (42) et (43) et les valeurs de  $I_y$ ,  $J$ ,  $I_\omega$  définies précédemment, BASLER établit la relation :

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\sigma'_{cr}^2 + \sigma''_{cr}^2} \quad (44)$$

Dans cette expression  $\sigma'_{cr}$  représente la contrainte de flambement par torsion suivant St Venant de toute la poutre

$$\sigma'_{cr} = \frac{0,65 E}{\frac{1 \cdot b}{2 c \cdot e}} \quad (45)$$

$\sigma''_{cr}$  représente la contrainte de flambage latéral de la semelle comprimée.

$$\sigma''_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{1}{r}\right)^2} \quad (46)$$

$r$ , rayon de giration de la section étant défini par :

$$r^2 = \frac{\frac{2}{6} \cdot A_m \cdot c^2}{A_m + \frac{1}{6} A_a} \quad (47)$$

C'est la combinaison des contraintes  $\sigma'_{cr}$  et  $\sigma''_{cr}$  suivant l'équation (44) qui détermine la contrainte critique vis-à-vis du flambage latéral. En fait, pour les structures à coefficient de finesse élevé, DE VRIES (Réf. 21) a montré que seule la contrainte  $\sigma''_{cr}$  était à prendre en considération, la contrainte  $\sigma'_{cr}$  étant faible devant  $\sigma''_{cr}$ .

La limite de la valeur  $\sigma'_{cr}$  peut se définir par rapport à  $\sigma_e$  à partir de divers règlements. Les recommandations du "Guide to design criteria for metal compression members" donnent :

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_e} = 1 - \frac{\lambda^2}{4} \quad \text{pour } 0 < \lambda < \sqrt{2} \quad (48)$$

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_e} = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{pour } > \sqrt{2}$$

$$\text{Avec } \lambda = \frac{1}{r} \quad \frac{\epsilon_e}{\pi^2} = 1 \sqrt{\frac{\epsilon_e}{\pi^2} \frac{A_m + \frac{1}{6} A_a}{\frac{2}{6} A_m \cdot c^2}} \quad (49)$$

### 2.3.2.3. Flambage par torsion de la semelle comprimée

En fait, il semble difficile de traiter séparément le flambage par torsion et le flambage latéral et c'est uniquement dans un but de simplification que ces études sont menées séparément.

Dans le cas où nous négligeons la liaison de la membrure à l'âme de la poutre, le problème se ramène au flambement de torsion d'une membrure plane dépendant du coefficient c/e voir fig.21.

En considérant chacune des ailes comme une plaque uniformément comprimée, reposant simplement sur les trois côtés et libre sur le quatrième, il vient :

$$\sigma_{cr} = k \cdot \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{e^2}{c^2} \quad (50)$$

La valeur k a été déterminée à partir de la méthode de l'énergie par BLEICH. (Réf. 17).

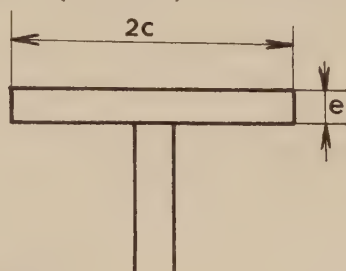


FIG: 21

La limite de  $\sigma_{cr}$  est encore obtenue par rapport à  $\sigma_e$  lorsque l'on fait choix d'un règlement de spécifications de calcul.

### 2.3.2.4. Contraintes ultimes de flexion

Bien qu'il semble que la résistance à la flexion d'une poutre plane soit liée au flambage de la semelle comprimée suivant un des trois types de flambage vu précédemment, il n'est pas facile de déduire directement la résistance ultime de la poutre. Cela est dû au fait que dans les résultats des contraintes critiques, interviennent quatre paramètres indépendants :

$$\frac{1}{r}, \quad \frac{c}{e}, \quad \frac{A_a}{A_m} \quad \text{et} \quad \frac{b}{h}$$

En ne considérant que le comportement de l'âme seule sous l'action du moment de flexion, BASLER a fait la constatation suivante : le moment ultime encaissé par une section est relié au coefficient de finesse  $\frac{b}{h}$  de cette section. Dans les poutres à haut coefficient de finesse, les grandes déflexions latérales qui sont développées dans la zone comprimée de l'âme engendrent une redistribution des contraintes de l'âme vers la semelle comprimée. Les contraintes dans la semelle comprimée et dans une position voisine de l'âme peuvent alors excéder les valeurs prédites par la théorie des poutres :  $\sigma = \frac{My}{I}$  où  $y$  est la distance de la fibre neutre à la fibre pour laquelle  $\sigma$  est calculée, et  $I$  est le moment d'inertie de la section entière de la poutre. Au fur et à mesure que le coefficient de finesse s'accroît, cette redistribution de contraintes devient plus prononcée, autrement dit, une plus petite portion de l'âme est associée à la semelle comprimée pour résister aux contraintes de flexion (BASLER associe à la semelle une largeur d'âme = 30 h). Pour le cas limite  $\beta = \frac{b}{h} \rightarrow \infty$  seule la semelle en compression serait utilisable pour résister aux contraintes de flexion. Pour les âmes épaisses, il n'apparaît pas de redistribution de contraintes (ces phénomènes suivent davantage la théorie des poutres). Dans ce dernier cas, les contraintes dans l'âme entre l'axe neutre et la semelle en compression atteindront la limite élastique  $\sigma_e$ , c'est-à-dire que le moment plastique  $M_p$  sera développé dans toute la section.

Les conclusions de BASLER et THURLIMAN se traduisent à l'aide des paramètres suivants :

- $M_u$  = moment ultime (correspondant à la ruine de la poutre)
- $M_e$  = moment correspondant à l'apparition de la contrainte  $\sigma_e$  dans la semelle comprimée.
- $M_p$  = moment correspondant à la plastification de toute la section.
- $\beta_0$  = coefficient de finesse maximum permettant une distribution linéaire des contraintes.

Ce coefficient est obtenu en écrivant que lorsque le moment  $M_e$  se développe, la contrainte  $\sigma_e$  entraîne le voilement de l'âme.  $\beta_0$  est donc défini par :

$$\sigma_e = k_1 \cdot \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{1}{\beta_0} \right]^2 \quad (51)$$

$k_1$  étant le coefficient défini au § 2,1 et dont la valeur en fonction de  $\alpha$  est donnée sur les abaques de la Fig. 6.

- $\beta_A$  = coefficient de finesse maximum pouvant permettre le développement du moment plastique  $M_p$ . Dans ces conditions, la contrainte  $\sigma_e$  se développe dans toute la section et on est ramené à l'étude de la stabilité d'une bande d'âme de largeur  $\frac{b}{2}$  sous l'action d'une contrainte uniforme  $\sigma_e \cdot \beta_A$  est donc défini par :

$$\sigma_e = k_3 \cdot \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{\beta_A} \right)^2 \quad (52)$$

$k_3$  étant un coefficient de voilement correspondant à l'application, sur deux côtés opposés d'une plaque, d'une charge uniformément répartie. Les valeurs de  $k_3$  sont données par BLEICH (Réf.18) pour des plaques dans différentes conditions d'appuis. Les deux côtés chargés uniformément étant appuyés :

$k_3 = 0,425$  si un côté est simplement appuyé, l'autre libre

$k_3 = 1,277$  si un côté est encastré, l'autre libre

-  $\beta_B$  est une valeur limite du coefficient de finesse. Au delà de cette valeur, les forces transversales dues à la courbure peuvent engendrer le flambage vertical de la membrure comprimée. Nous avons défini cette valeur limite au § 2.3.2.1. (équation 39).

$$\beta_B = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{24(1-\nu^2)} \cdot \frac{A_a}{A_m} \cdot \frac{1}{\sigma_m \cdot \epsilon_m}}$$

Les conclusions de BASLER et THURLIMAN sont les suivantes :

|      |                             |                                         |      |
|------|-----------------------------|-----------------------------------------|------|
| Pour | $\beta = \beta_A$           | $\frac{M_u}{M_e} = \frac{M_p}{M_e}$     |      |
|      | $\beta_A < \beta < \beta_0$ | $\frac{M_p}{M_e} > \frac{M_u}{M_e} > 1$ |      |
|      | $\beta = \beta_0$           | $\frac{M_u}{M_e} = 1$                   | (53) |
|      | $\beta > \beta_0$           | $\frac{M_u}{M_e} < 1$                   |      |

Ceci peut être traduit sur le graphique (Fig. 22)

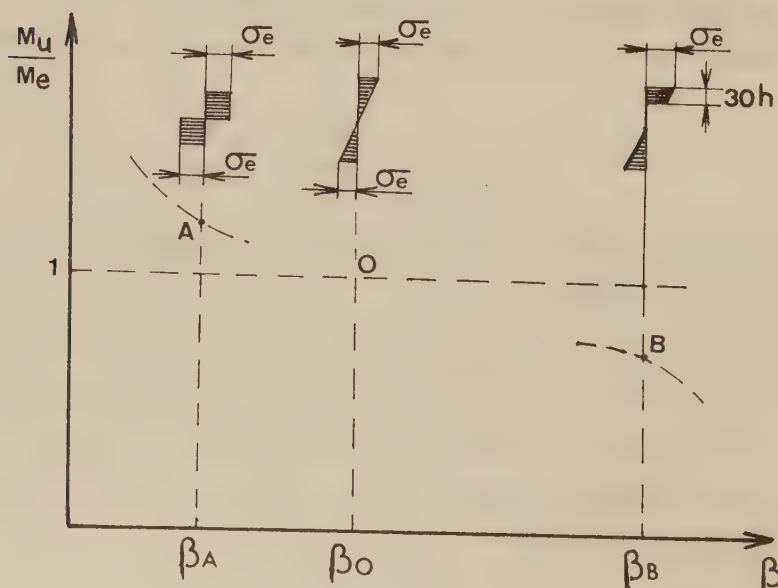


FIG: 22

BASLER fait l'hypothèse qu'entre A et B la variation du rapport  $\frac{M_u}{M_e}$  est linéaire, ce qui semble en bonne concordance avec le graphique lorsque l'on se fixe pour valeur limite de  $\beta_B$  la valeur de  $\beta_B$  correspondant à  $\frac{A}{A_m} \rho = 0,5$  ,

déduite de l'équation (41) L'utilisation de cette valeur  $\rho = 0,5$  fournit une valeur du côté de la sécurité pour le coefficient de finesse  $\beta_B$ .

L'équation de la droite AB peut s'écrire approximativement :

$$\frac{M_u}{M_e} = 1 - 0,0005 \rho (\beta - \beta_0) \quad (54)$$

La relation entre contraintes ultimes et limite élastique s'obtient en divisant  $M_u$  et  $M_e$  par le module de section

$$\frac{\sigma_u}{\sigma_e} = 1 - 0,0005 \rho (\beta - \beta_0) \quad (55)$$

S'il y a risque d'instabilité par torsion ou par flambage latéral, il y a lieu de remplacer  $\sigma_e$  par la contrainte  $\sigma_{cr}$  correspondant à l'apparition de l'un ou l'autre de ces phénomènes.



La théorie linéaire des plaques donne, pour une plaque plane chargée dans son plan, la valeur des coefficients de voilement en fonction du rapport des dimensions et des conditions sur le contour. Ces coefficients sont dans la plupart des cas déterminés par la méthode énergétique. Nous avons cherché à utiliser la méthode d'analyse de la déformée en l'appliquant au cas des plaques appuyées sur leur contour et munies d'un raidisseur longitudinal au  $1/5^{\text{ème}}$  supérieur de la hauteur, ceci pour un chargement entraînant simultanément contrainte longitudinale (flexion d'une âme de poutre) et cisaillement (action de l'effort tranchant sur une âme de poutre).

Par ailleurs, la théorie de BASLER utilise un certain nombre d'hypothèses simplificatrices dont l'influence sur la détermination du moment de flexion et de l'effort tranchant ultime pouvait se révéler non négligeable. Nous avons donc effectué une étude critique de ces diverses hypothèses et chiffré leur incidence notamment sur les plaques de coefficient de finesse élevé.

### 3.1 - COMPLEMENTS SUR LA THEORIE LINEAIRE DES PLAQUES -

Les coefficients  $k_1$  et  $k_2$  définissant les valeurs des contraintes critiques de voilement sont donnés sur les courbes  $k = f(\alpha)$  de la Fig. 6.

Lorsqu'un panneau est soumis simultanément à la flexion et à l'effort tranchant, on peut utiliser pour la détermination des contraintes critiques l'équation (1).

Lorsque la plaque comporte un raidisseur, le problème est plus complexe et si certains ouvrages contiennent des abaques permettant d'obtenir les valeurs des coefficients de voilement (voir KLOPPPEL et SCHEER) pour de nombreux cas de charge et de positionnement des raidisseurs, on peut cependant être amené à résoudre le problème de manière analytique.

Dans de nombreux ouvrages, ce problème est traité à partir de la méthode de l'énergie. Nous ne développerons donc pas cette méthode parfaitement analysée par TIMOSHENKO (Réf. 2). Certains auteurs cependant et en particulier BLEICH (Réf. 17) et MILOSAVLJEVITCH (Réf. 28) traitent le problème du voilement à partir de la résolution de l'équation différentielle du voilement pour certains cas particuliers de chargement et pour des plaques raidies ou non.

C'est cette méthode que nous avons voulu appliquer au cas d'une plaque sur appuis simples comportant un raidisseur longitudinal au  $1/5^{\text{ème}}$  supérieur et soumise simultanément à la flexion et au cisaillement. A partir de l'équation générale ainsi obtenue, il est ensuite facile de déduire les coefficients de voilement relatifs à différents cas de charge pris séparément.

3.1.1. Résolution du problème du voilement à partir de l'analyse de la déformée

3.1.1.1. Définitions des paramètres utilisés dans cette étude

Les principaux paramètres sont définis sur la figure ci-dessous :

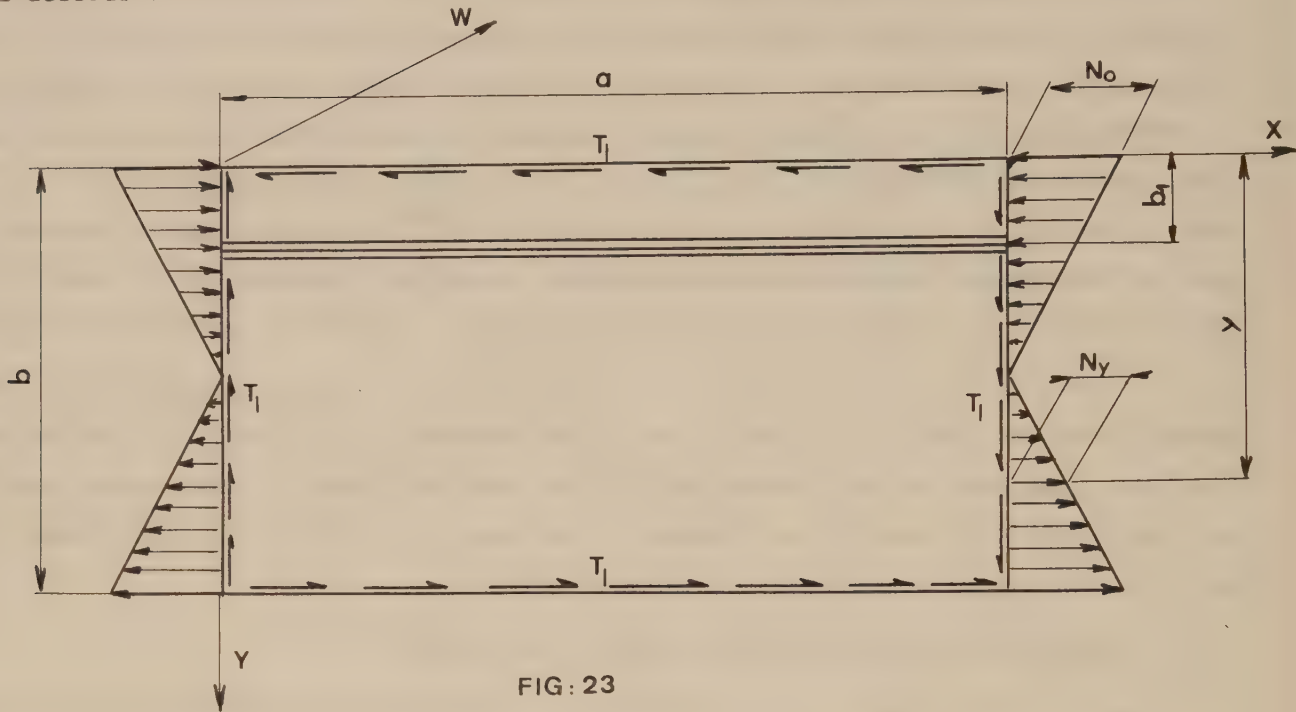


FIG: 23

Nous noterons en particulier que :

- la plaque rectangulaire est définie par un coefficient de forme  $\alpha = \frac{a}{b}$ , rapport de son plus grand à son plus petit côté,
- la plaque est soumise à une distribution linéaire de charge  $N_y = N_0(1 - \phi \cdot \frac{y}{b})$  et par des efforts de cisaillement  $T_l$  uniformément répartis sur son contour,
- la plaque est renforcée par un raidisseur transversal de rigidité  $EI$  placé à la distance  $y = b_1$  du bord supérieur de la plaque. Ce raidisseur est associé de manière continue à la plaque.

3.1.1.2. Hypothèses

- 1) Le matériau constituant la plaque est homogène et isotrope et se soumet sans limite à la loi de Hooke.
- 2) La plaque est idéalement plane, d'épaisseur constante et isotrope, et est sollicitée par des forces situées rigoureusement dans son plan moyen.
- 3) Les déplacements des points de la plaque normalement à son plan, provoqués par le voilement, sont faibles vis-à-vis de son épaisseur.

- 4) La rigidité à la torsion du raidisseur n'est pas introduite dans le calcul des contraintes critiques.
- 5) La plaque est simplement appuyée sur ses quatre côtés.

### 3.1.1.3. Expression de la flèche transversale et de l'effort exercé par le raidisseur sur la plaque

Utilisation d'une série double de Fourier pour la représentation de la flèche transversale  $w$  prise lors du voilement par un point de coordonnées  $x$  et  $y$ .

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \quad (55)$$

Cette équation satisfait aux conditions aux limites :

$$\begin{aligned} 1) w &= 0 \quad \text{pour } x=0, x=a \text{ et } y=0, y=b \\ 2) M_y &= D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{pour } x=0, x=a \\ M_x &= D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \text{pour } y=0, y=b \end{aligned}$$

$$\text{avec } D = \text{rigidité de flexion de la plaque } D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

$\nu$  = coefficient de Poisson du matériau

$E$  = module d'Young du matériau

$h$  = épaisseur de la plaque

Expression de l'effort exercé par le raidisseur sur la plaque :

Soit  $q$  l'effort par unité de surface exercé par le raidisseur sur la plaque. La plaque et le raidisseur se déformant de la même manière lors du voilement, il résulte que l'équation de la ligne élastique du raidisseur est définie par l'équation différentielle suivante :

$$q \cdot 2s = EI \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)_{y=b_1} = EI \sum_m \sum_n A_{mn} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi b_1}{b} \quad (56)$$

$2s$  désignant la largeur du raidisseur

$q$  peut également se représenter par une série double de Fourier

$$q = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (57)$$

Les valeurs inconnues des coefficients  $C_{mn}$  de la série de Fourier seront déterminées par le procédé de Navier. On multiplie les deux membres de l'équation (57) par le facteur  $\sin \frac{i\pi x}{a} \cdot \sin \frac{j\pi y}{b}$  et on intègre en x et en y, les bornes d'intégration étant 0 et a pour x et 0 et b pour y.

$$q \int_0^a \int_0^b \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} dx dy = \sum_m \sum_n C_{mn} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{i\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{j\pi y}{b} dy \quad (58)$$

En tenant compte des propriétés des fonctions orthogonales :

$$q \int_0^a \int_0^b \sin \frac{i\pi x}{a} \cdot \sin \frac{j\pi y}{b} dx dy = C_{ij} \cdot \frac{ab}{4} \quad (59)$$

(La sommation se ramène à un seul terme correspondant à  $m = i$   $n = j$ )

En utilisant cette relation dans l'équation (56) avec y constant et égal à  $b_1$  et en limitant l'intégration en y aux bornes  $(b_1-s)$  et  $(b_1+s)$  domaine correspondant au raidisseur, il vient :

$$C_{ij} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_{b_1-s}^{b_1+s} \sum_m \sum_n A_{mn} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi b_1}{b} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi b_1}{b} dx dy$$

$$= \frac{4EI}{a^4 b \cdot 2s} \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{n\pi b_1}{b} \sin \frac{j\pi b_1}{b} (2s) \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{i\pi x}{a} dx \quad (60)$$

en remarquant que :

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{i\pi x}{a} dx = \frac{1}{2}a \quad \text{si } m = i$$

$$= 0 \quad \text{si } m \neq i$$

$$C_{ij} = \frac{2EI \pi^4 i^4}{a^4 b} \cdot \sin \frac{j\pi b_1}{b} \sum_n A_{in} \sin \frac{n\pi b_1}{b} \quad (61)$$

i, j, m, n sont des nombres entiers quelconques que l'on peut donc permuter.

L'équation (57) peut alors s'écrire :

$$q = \frac{2EI \pi^4}{a^4 b} \sum_m \sum_n \sum_i A_{mij} \sin \frac{m\pi b_1}{b} \cdot \sin \frac{j\pi b_1}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (62)$$

#### 3.1.1.4. Résolution de l'équation différentielle de la surface élastique

Forme générale de cette équation (voir Réf. 2)

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2 \partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -q - N_0 \left( 1 - \frac{y}{b} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 T_L \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (63)$$

que l'on peut encore écrire pour des raisons de présentation de calcul :

$$D(A + B + C) = -X - Y_1 + Y_2 + Z \quad (64)$$

Avec l'expression (55) de w, chacun des termes s'écrit :

$$A = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$B = 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = 2 \sum_m \sum_n A_{mn} \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$C = \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$X = q = \frac{2EI\pi^4}{a^4 b} \sum_m \sum_n \sum_l A_{mj} m^4 \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{j\pi y}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$Y_1 = N_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -N_0 \sum_m \sum_n A_{mn} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$Y_2 = N_0 \varphi \frac{y}{b} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = N_0 \cdot \varphi \cdot \frac{y}{b} \sum_m \sum_n A_{mn} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$Z = 2T_l \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2T_l \sum_m \sum_n A_{mn} \frac{mn\pi^2}{ab} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

Pour résoudre l'équation (63) on emploiera encore le procédé de Navier, on multiplie les deux membres de l'équation par  $\sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{r\pi y}{b}$  et on intègre en x et y, les bornes d'intégration étant 0 et a pour x et 0 et b pour y.

- 1 - Résolution de  $A' = \int_0^a \int_0^b A \cdot \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{r\pi y}{b} dx dy$

$$A' = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \sum_m \sum_n A_{mn} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{r\pi y}{b} dy$$

Pour obtenir des valeurs non nulles, il faut :  $m = k$   $n = r$

$$A' = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \cdot \frac{ab}{4} \cdot A_{kr} \quad (65)$$

- 2 - Résolution de  $B' = \int_0^a \int_0^b B \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{r\pi y}{b} dx dy$

$$B' = \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} 2 \sum_m \sum_n A_{mn} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{r\pi y}{b} dy$$

$$B' = \frac{2 m^2 n^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{ab}{4} \cdot A_{kr} \quad (m = k \quad n = r \text{ pour } B' \neq 0) \quad (66)$$

V - 3 - Résolution de  $C' = \int_0^a \int_0^b C \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{r\pi y}{b} dx dy$

$$C' = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \sum_m \sum_n A_{mn} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{r\pi y}{b} dy$$

$$= \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \frac{ab}{4} A_{kr} \quad (m=k \quad n=r \text{ pour } C' \neq 0) \quad (67)$$

V - 4 - Résolution de  $X' = \int_0^a \int_0^b X \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{r\pi y}{b} dx dy$

$$X' = \frac{2EI\pi^4}{a^4 b} \int_0^a \int_0^b \sum_m \sum_n \sum_l A_{mj} m^4 \sin \frac{n\pi b_1}{b} \sin \frac{j\pi b_1}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{r\pi y}{b} dx dy$$

$$= \frac{2EI\pi^4}{a^4 b} m^4 \left( \sum_l A_{mj} \sin \frac{j\pi b_1}{b} \right) \left( \sin \frac{n\pi b_1}{b} \right) \left( \sum_m \sum_n \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{r\pi y}{b} dy \right)$$

$$= \frac{2EI\pi^4}{a^4 b} \sum_l A_{kj} \sin \frac{j\pi b_1}{b} \sin \frac{r\pi b_1}{b} \frac{ab}{4} \quad (m=k \quad n=r \text{ pour } X' \neq 0) \quad (68)$$

- 5 - Résolution de  $Y'_1 = \int_0^a \int_0^b Y_1 \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{r\pi y}{b} dx dy$

$$Y'_1 = N_0 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sum_m \sum_n A_{mn} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{r\pi y}{b} dy$$

$$= N_0 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{ab}{4} A_{kr} \quad (m=k \quad n=r \text{ pour } Y'_1 \neq 0) \quad (69)$$

- 6 - Résolution de  $Y'_2 = \int_0^a \int_0^b Y_2 \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{r\pi y}{b} dx dy$

$$Y'_2 = N_0 \frac{\varphi}{b} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sum_m \sum_n A_{mn} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} dx \int_0^b y \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{r\pi y}{b} dy$$

$$= N_0 \frac{\varphi}{b} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot \frac{a}{2} \sum_n A_{kn} \int_0^b y \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{r\pi y}{b} dy \quad (m=k \text{ pour } Y'_2 \neq 0)$$

Remarques sur l'intégrale  $I = \int_0^b y \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{r\pi y}{b} dy$

L'intégration par parties conduit aux résultats suivants :

- si  $n \neq r$  avec  $n \pm r$  pair  $I = 0$

$$n \pm r \text{ impair } I = -\frac{b^2}{\pi^2} \frac{4rn}{(n^2 - r^2)^2}$$

- si  $n = r$   $I = \frac{b^2}{4}$

D'où les valeurs de  $Y'_2$  :

$$Y'_2 = N_0 \frac{\varphi}{b} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sum_n A_{kn} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{\pi^2} \cdot \frac{4 r n}{(n^2 - r^2)} \quad \text{si } n \pm r \text{ impair} \quad (70)$$

$$Y'_2 = N_0 \frac{\varphi}{b} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} A_{kr} \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{4} \quad \text{si } n = r \quad (71)$$

- 7 - Résolution de  $Z' = \int_0^a \int_0^b Z \cdot \sin \frac{k \pi x}{a} \sin \frac{r \pi y}{b} dx dy$

$$Z' = 2 \frac{\pi}{ab} \sum_m \sum_n A_{mn} \int_0^a \cos \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{k \pi x}{a} dx \int_0^b \cos \frac{n \pi y}{b} \sin \frac{r \pi y}{b} dy$$

Remarques sur l'intégration de  $J_1 = \int_0^a \cos \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{k \pi x}{a} dx$

si  $m \neq k$  avec  $m \pm k$  impair  $J_1 = \frac{2k}{(k^2 - m^2)} \frac{\pi}{a}$

$m \pm k$  pair  $J_1 = 0$

si  $m = k$   $J_1 = 0$

Mêmes conclusions pour  $J_2 = \int_0^b \cos \frac{n \pi y}{b} \sin \frac{r \pi y}{b} dy$

si  $n \neq r$  avec  $n \pm r$  impair  $J_2 = \frac{2r}{(r^2 - n^2)} \frac{\pi}{b}$

$n \pm r$  pair  $J_2 = 0$

si  $n = r$   $J_2 = 0$

Avec ces remarques, l'expression de  $Z'$  devient :

$$Z' = \frac{2 \pi}{ab} \sum_m \sum_n A_{mn} \frac{4 k r m n}{\frac{\pi^2}{ab} (k^2 - m^2)(r^2 - n^2)} \quad \begin{matrix} \text{avec } m \pm k \text{ impair} \\ n \pm r \text{ «} \end{matrix} \quad (72)$$

#### - 8 - Solution de l'équation

Avec les résultats obtenus en (65), (66), (67), (68) (69), (70) (71) et (72)

l'équation (63) s'écrit :

$$D \left[ \left( \frac{m \pi}{a} \right)^4 \frac{ab}{4} A_{kr} + \frac{2 m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} \cdot \frac{ab}{4} A_{kr} + \left( \frac{n \pi}{b} \right)^4 \cdot \frac{ab}{4} A_{kr} \right] \quad (73)$$

$$\begin{aligned}
 &= - \frac{2EI}{4a^4b} k^4 \cdot ab \cdot \sin \frac{r\pi b_1}{b} \sum_i A_{ki} \sin \frac{i\pi b_1}{b} \\
 &+ N_0 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{ab}{4} A_{kr} - N_0 \frac{\varphi}{2} \cdot A_{kr} \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{b^2}{4} - N_0 \frac{\varphi}{b^2 n} A_{kn} \frac{a}{2} \cdot \frac{b^2}{\pi^2} \frac{4rn}{(n-r)^2} \\
 &+ \frac{2T_L \pi^4}{ab} \sum_m \sum_n A_{mn} \frac{4kr \cdot mn}{(k^2 - m^2)(r^2 - n^2) \frac{\pi^2}{ab}}
 \end{aligned}$$

Cette équation peut se simplifier en divisant les 2 membres par  $\frac{\pi^4 D b}{4 a^4}$  et en posant  $\alpha = a/b$ . Il vient :

$$\begin{aligned}
 A_{kr} (m^2 + n^2 \alpha^2)^2 &= - \frac{2EI}{Db} k^4 \sin \frac{r\pi b_1}{b} \sum_i A_{ki} \sin \frac{i\pi b_1}{b} \\
 &+ \frac{N_0}{D} \left( \frac{ma}{\pi} \right)^2 A_{kr} - \frac{N_0}{D} \left( \frac{ma}{\pi} \right)^2 A_{kr} \frac{\varphi}{2} + \frac{N_0}{D} \left( \frac{ma}{\pi} \right)^2 8\varphi \sum_n A_{kn} \frac{rn}{(n-r)^2} \\
 &+ \frac{32 a^2 \alpha T}{D \pi^4} \sum_m \sum_n A_{mn} \frac{krmn}{(m^2 - k^2)(n^2 - r^2)}
 \end{aligned} \quad (74)$$

En faisant les mises en facteurs nécessaires et en permutant les indices  $m, n, k, r$  (entiers quelconques) il vient :

$$\begin{aligned}
 A_{mn} (m^2 + n^2 \alpha^2)^2 &= - \frac{2EI}{Db} m^4 \sin \frac{n\pi b_1}{b} \sum_i A_{mi} \sin \frac{i\pi b_1}{b} \\
 &+ \frac{N_0}{D} \left( \frac{ma}{\pi} \right)^2 \left[ A_{mn} \left( 1 - \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{8\varphi}{\pi^2} \sum_r A_{mr} \frac{rn}{(r-n)^2} \right] \\
 &+ \frac{32 a^2 T_L \alpha}{D \pi^4} \sum_k \sum_r A_{kr} \frac{k \cdot r \cdot m \cdot n}{(m^2 - k^2)(n^2 - r^2)}
 \end{aligned} \quad (75)$$

avec  $r \pm n$   $m \pm k$  impair

En posant  $\frac{EI}{Db} = Y$

$$N_0 = h \sigma_{cr} \quad T_L = \tau_{cr} \cdot h$$

avec  $\sigma_{cr}$  = contrainte critique de compression

$\tau_{cr}$  = contrainte critique de cisaillement

$$\text{et } k_1 = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_0} \quad k_2 = \frac{\tau_{cr}}{\sigma_0}$$

avec  $\sigma_0 = \frac{D \pi^2}{b^2 h}$  contrainte de référence

L'équation (75) peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned}
 & A_{mn} (m^2 + n^2 \alpha^2)^2 + 2 \gamma \cdot m^4 \sin \frac{n \pi b_1}{b} \sum_i A_{mi} \sin \frac{i \pi b_1}{b} \\
 & - k_1 \alpha^2 m^2 \left[ A_{mn} \left(1 - \frac{\varphi}{r}\right) + \frac{8 \varphi}{\pi^2} \sum_r A_{mr} \frac{r n}{(r^2 - n^2)^2} \right] \\
 & - \frac{32 k_2 \alpha^3}{\pi^2} \sum_k \sum_r A_{kr} \frac{k r \cdot m \cdot n}{(m-k)^2 (n-r)^2} = 0
 \end{aligned} \tag{76}$$

avec  $m \pm k$        $n \pm r$     impair

On retrouve ainsi une équation analogue à celle obtenue par application des critères de l'énergie (voir Réf. 5).

La détermination des coefficients de voilement  $k_1$  et  $k_2$  se fait à partir du système d'équations linéaires et homogènes obtenues lorsque l'on donne à  $m$  et  $n$  les valeurs 1 à  $i$  (déterminant d'ordre  $i^2$ ).

Le déterminant  $\Delta$  des coefficients doit être nul pour que l'on obtienne des valeurs non nulles pour les coefficients  $A_{mn}$ . L'équation  $\Delta = 0$  représente donc la relation entre les contraintes critiques de voilement, la rigidité de la plaque et la raideur du raidisseur.

Par ailleurs, la connaissance du cas de chargement permet d'exprimer une relation entre  $\sigma_{cr}$  et  $\tau_{cr}$  et, par conséquent, entre  $k_1$  et  $k_2$ , ceci permettra dans l'équation  $\Delta = 0$ , d'exprimer  $k_1$  et  $k_2$  en fonction des divers paramètres connus.

Les valeurs théoriques de  $k_1$  et  $k_2$  seront obtenues en faisant tendre  $i$  vers l'infini. Dans la pratique, on se limitera à une valeur  $i$  telle que l'utilisation d'une valeur  $i+1$  n'apporte pas sur la valeur de  $k_1$  ou  $k_2$  précédemment trouvée une correction supérieure à un pourcentage fixé à l'avance. Les valeurs de  $i$  fréquemment utilisées sont de l'ordre de 3 ou 4 pour une précision sur les valeurs de  $k_1$  ou  $k_2$  de l'ordre de 1 %.

La résolution du système d'équations (76) a été confiée au centre de calcul de l'E.N.S.M. La convergence des valeurs de  $k_1$  et  $k_2$  pour un nombre limité de valeurs de  $m$  et de  $n$  a pu être vérifiée en faisant varier le nombre d'équations du système (de 4 à 36). Les études de convergence ont été faites en introduisant les paramètres suivants :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 2,35 & \frac{k_1}{k_2} &= 1,25 \\
 \gamma &= 111 \\
 \frac{b_1}{b} &= 0,2
 \end{aligned}$$

L'organigramme de résolution du système d'équations linéaires est représenté à la page 41.

### 3.1.2. Application à divers cas de chargement pour des plaques planes avec ou sans raidisseur, supposées appuyées sur leur contour

Nous avons effectué les calculs pour des valeurs égales de  $m$  et  $n$  dans le but de déterminer la convergence du résultat en accordant a priori la même importance aux déformations longitudinales et transversales. Cette hypothèse est plutôt pessimiste pour la convergence.

#### 3.1.2.1. Plaque sans raidisseur soumise à la flexion pure

L'équation (76) se ramène à :

$$A_{mn} (m^2 + n^2 \alpha^2)^2 - k_1 \cdot \alpha^2 \cdot m^2 \frac{16}{\pi^2} \sum_r A_{mr} \frac{r \cdot n}{(r^2 - n^2)^2} = 0 \quad (77)$$

avec  $r \pm n$  impair

Les valeurs de  $k_1$  obtenues pour différentes valeurs de  $m$  et de  $n$  sont représentées sur la courbe Fig. 24

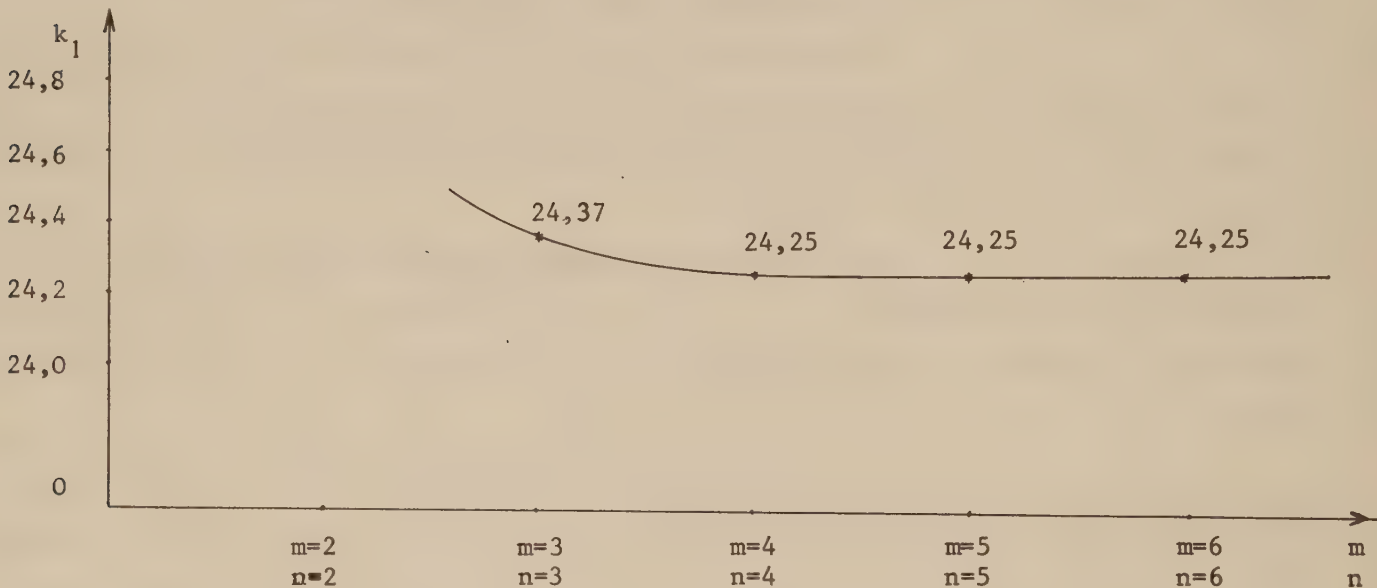


Fig. 24 - Convergence de  $k_1$  (flexion pure)

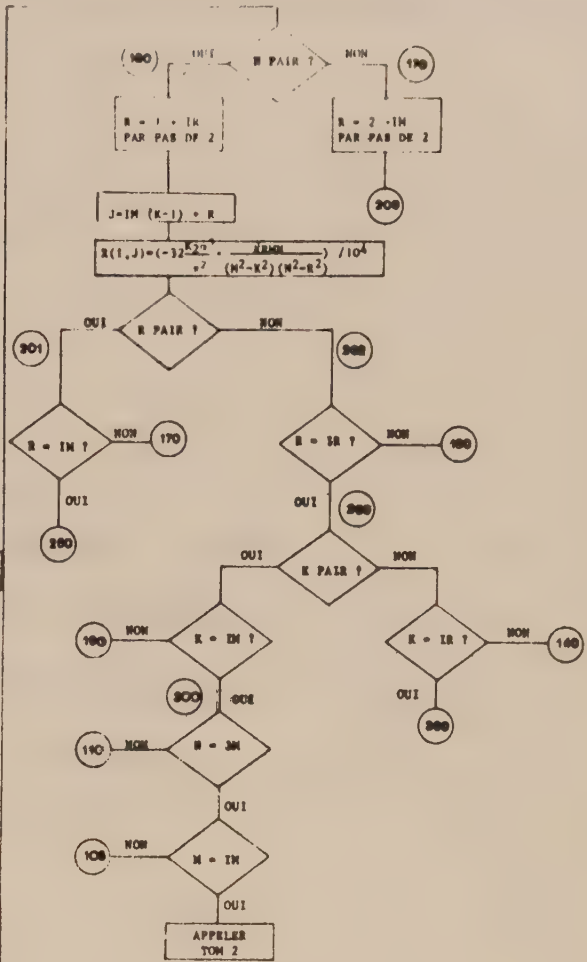
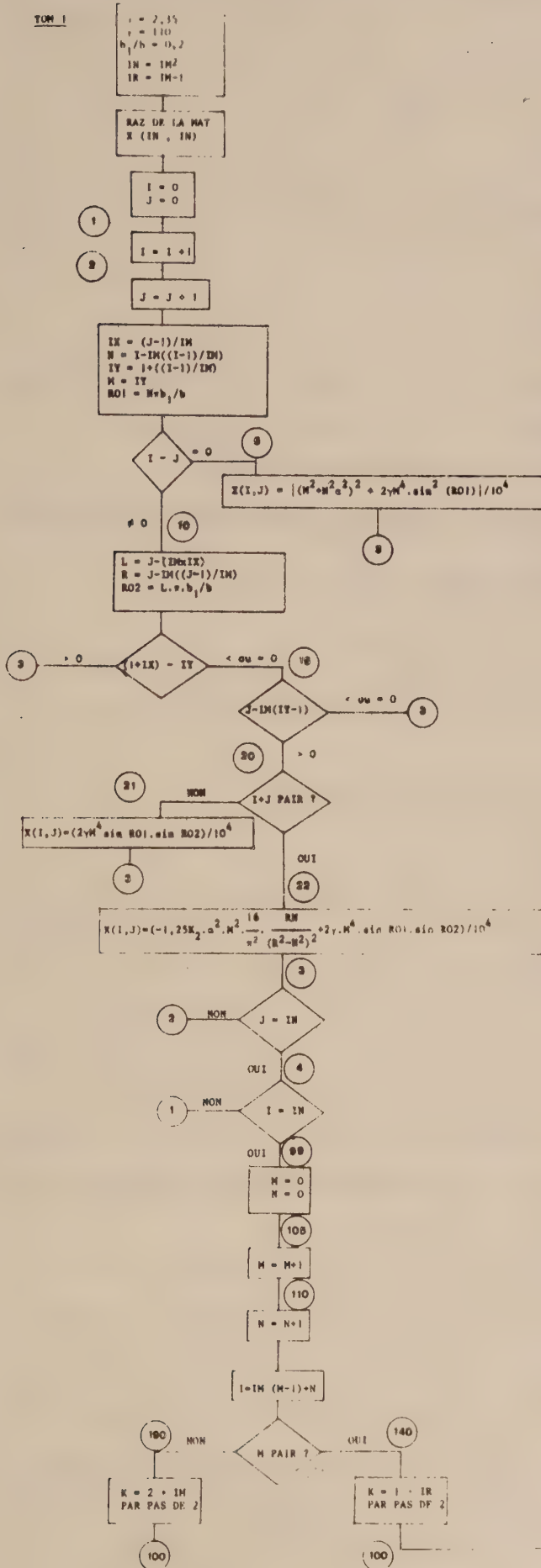
#### 3.1.2.2. Plaque sans raidisseur soumise à l'effort tranchant

L'équation (76) se ramène à :

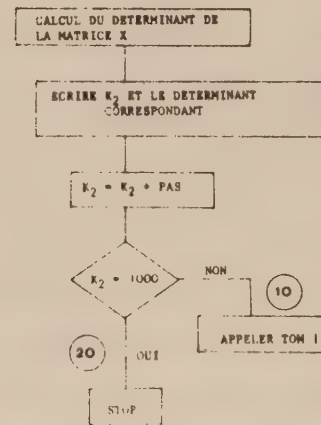
$$A_{mn} (m^2 + n^2 \alpha^2) - \frac{32 \cdot k_2 \cdot \alpha^3}{\pi^2} \sum_k \sum_r \frac{k \cdot r \cdot m \cdot n}{(m^2 - k^2)(n^2 - r^2)} = 0 \quad (78)$$

avec  $r \pm n$  }  
 $m \pm k$  } impair

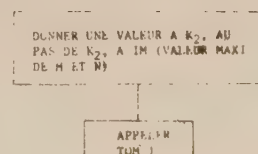
ORGANIGRAMME: Détermination du coefficient de voilement dans le cas général.



**TOM 2**



**PROGRAMME D'APPEL**



Les valeurs de  $k_2$  obtenues pour différentes valeurs de  $m$

et  $n$  sont représentées sur la courbe Fig. 25.

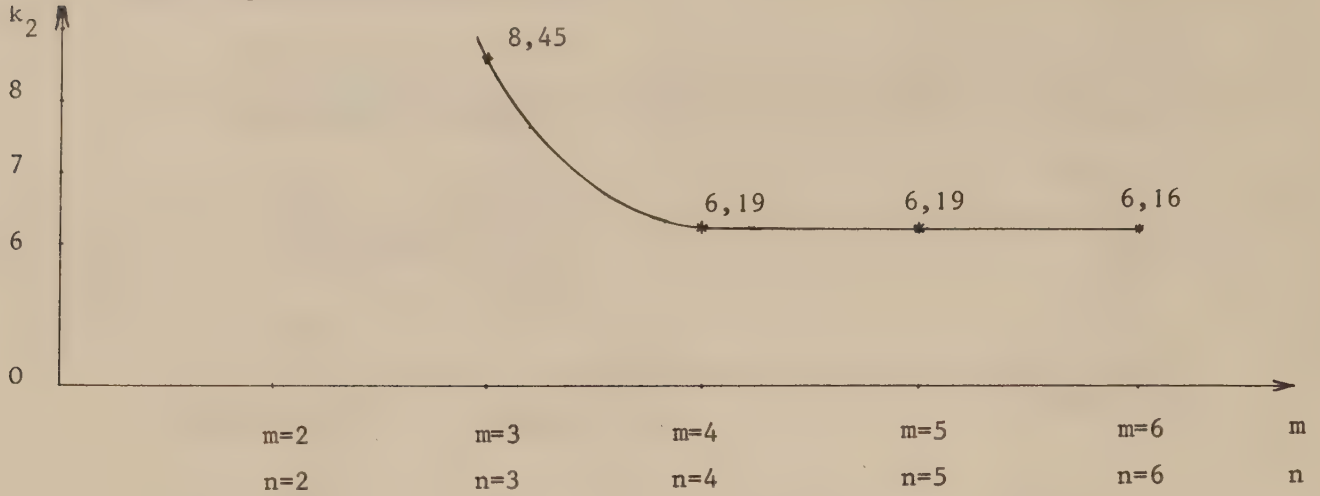


Fig. 25 - Convergence de  $k_2$  (cisaillement pur)

3.1.2.3. Plaque sans raidisseur soumise à la flexion et à l'effort tranchant

L'équation (76) se ramène à :

$$A_{mn} (m^2 + n^2 \alpha^2)^2 - k_1 \cdot \alpha^2 \cdot m^2 \frac{16}{\pi^2} \sum_r A_{mr} \frac{r \cdot n}{(r^2 - n^2)^2} - 32 \frac{k_2 \alpha^3}{\pi^2} \sum_k \sum_r A_{kr} \frac{k \cdot r \cdot m \cdot n}{(m^2 - k^2)(n^2 - r^2)} = 0 \quad (79)$$

Les conditions de chargement sur un panneau permettent de déterminer une relation entre  $\sigma$  et  $\tau$  au centre du panneau. Si l'on désire la même sécurité vis-à-vis du voilement par cisaillement ou par flexion, on devra vérifier :

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{\sigma_{cr}}{\tau_{cr}} = \frac{k_1}{k_2} \quad (80)$$

Dans l'étude de convergence, nous avons  $\frac{k_1}{k_2} = 1,25$ . La convergence sur les valeurs de  $k_2$ , dans ce cas de chargement est représentée sur la courbe Fig. 26.

(voir Fig. page suivante)

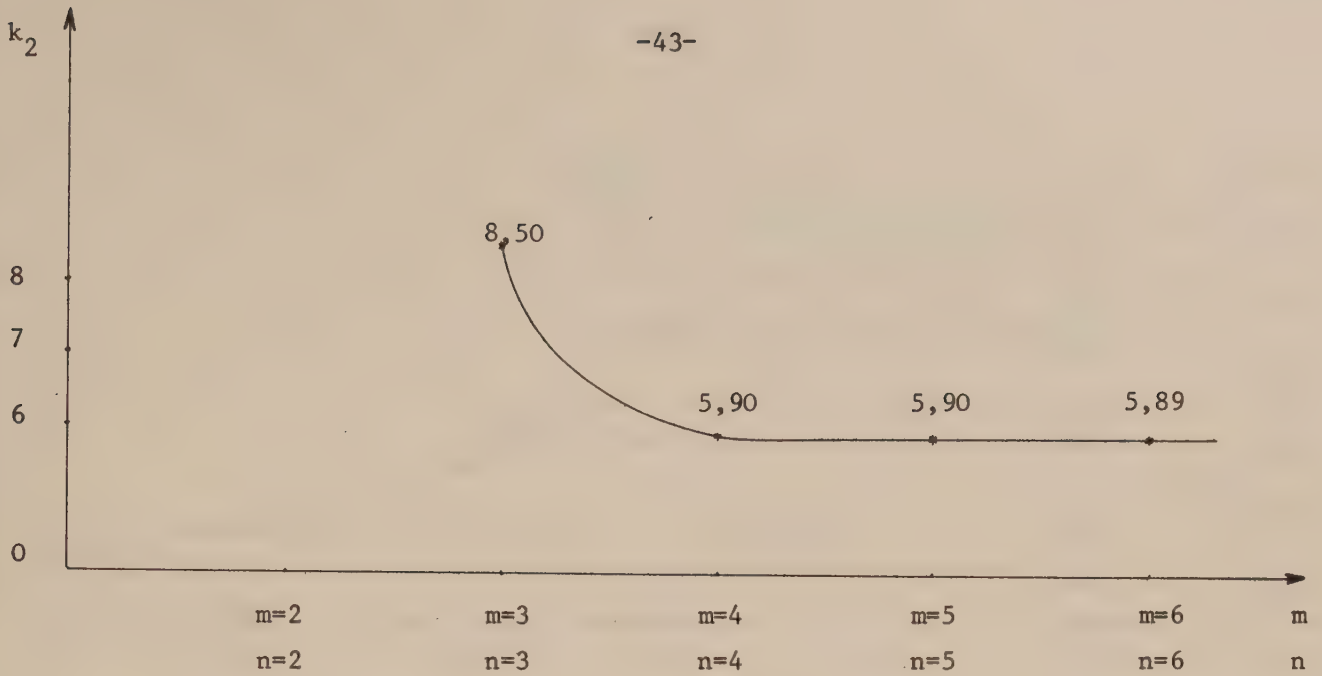


Fig. 26 - Convergence de  $k_2$  (flexion + cisaillement)

### 3.1.2.4. Plaque avec raidisseur soumise à la flexion pure

L'équation (76) se ramène à :

$$A_{mn} (m^2 + n^2 \alpha^2)^2 + 2\gamma \cdot m^4 \cdot \sin \frac{n\pi b_1}{b} \sum_j A_{mj} \sin \frac{j\pi b_1}{b} - k_1 \alpha^2 m^2 \frac{16}{\pi^2 r} \sum A_{mr} \frac{r \cdot n}{(r^2 - n^2)^2} = 0 \quad (81)$$

Nous avons vérifié la convergence de cette équation pour différentes valeurs de  $\gamma$ . Les résultats sont indiqués sur la Fig. 27

On remarque que la convergence est bonne pour les valeurs de  $\gamma$  inférieures à  $\gamma = 50$ . Au dessus de cette valeur, il faut des valeurs de  $m$  et de  $n$  supérieures à 5 pour que l'on puisse affirmer la convergence. Compte tenu de la capacité de l'ordinateur (IBM 1130) nous n'avons pu explorer les valeurs  $k_1$  correspondant à  $m > 6$  et  $n > 6$ , et par conséquent déterminer la valeur limite de  $k_1$  pour des valeurs  $\gamma$  supérieures à 50.

La justification de cette limite vers laquelle tend  $k_1$  pour des valeurs importantes de  $\gamma$  peut être donnée par la notion de rigidité optimum introduite par MASSONNET (Réf. 26). Lorsque  $\gamma$  s'accroît la résistance au voilement de la plaque s'accroît : pour une valeur de  $\gamma$  suffisamment élevée, il se forme une ligne nodale le long du raidisseur et à cet instant, une augmentation de la rigidité du raidisseur n'augmente pas la stabilité de la plaque. Une étude, au moyen d'approximations successives, a été faite par DUBAS (Réf. 27) qui trouve comme valeur limite  $k_1 = 129$  pour une poutre raidie longitudinalement au 1/5 ème supérieur, ce qui semble bien confirmer le résultat de notre étude de convergence.

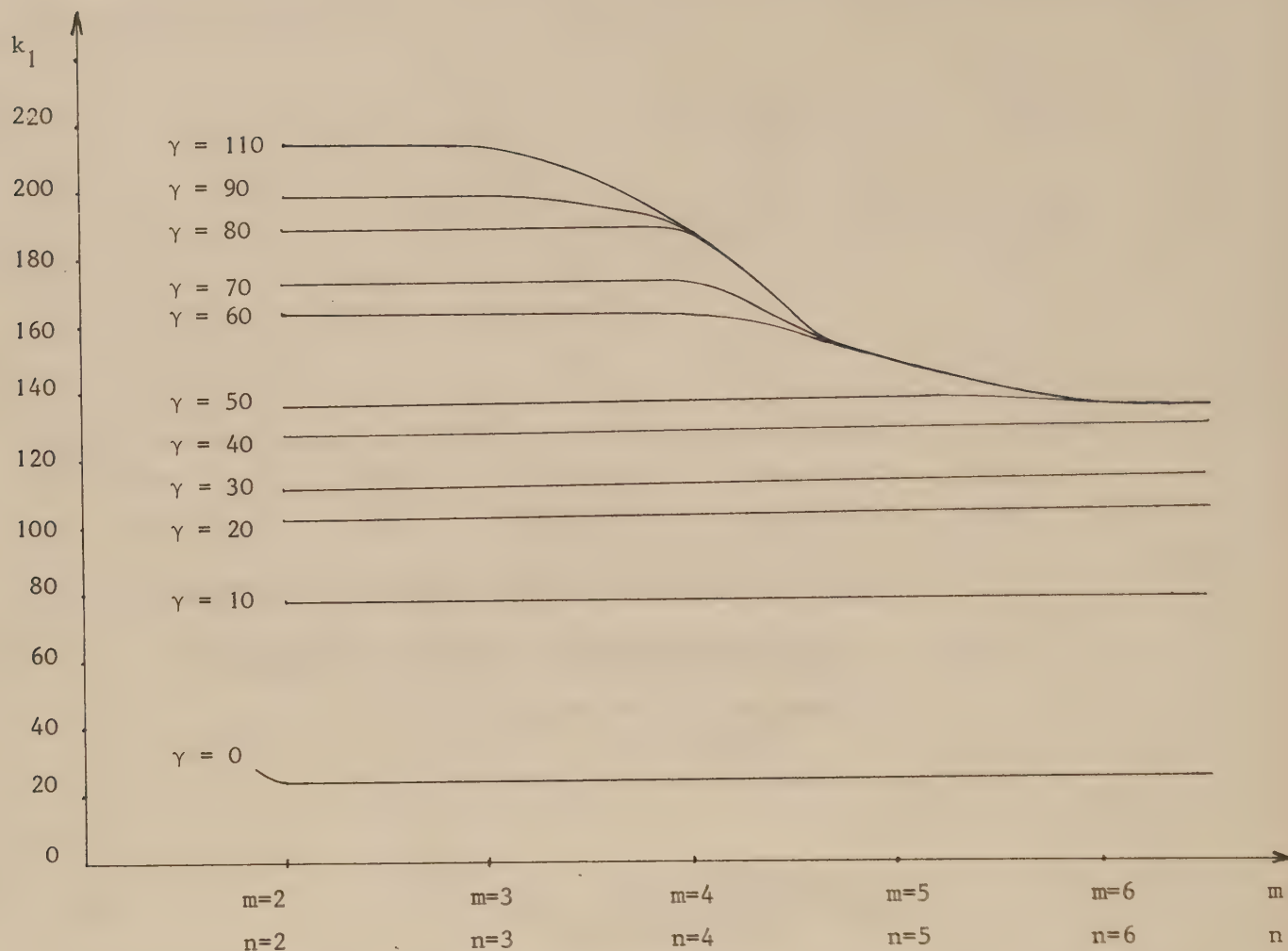


Fig. 27 - Convergence de  $k_1$  (plaque avec raidisseur - flexion pure)

### 3.1.2.5. Plaque avec raidisseur soumise à l'effort tranchant

L'équation (76) se ramène à :

$$A_{mn} (m^2 + n^2 \alpha^2)^2 + 2\gamma \cdot m^4 \cdot \sin \frac{n\pi b_1}{b} \sum_j A_{mj} \sin \frac{j\pi b_1}{b} - \frac{32}{\pi^2} \frac{k_2}{\alpha^3} \sum_k \sum_r A_{kr} \frac{k \cdot r \cdot m \cdot n}{(m^2 - k^2)(n^2 - r^2)} = 0 \quad (82)$$

Pour une valeur élevée de  $\gamma$  ( $\gamma = 110$ ), la convergence n'apparaît que pour des valeurs de  $m$  et de  $n$  au moins égales à 5. La capacité de l'ordinateur ne nous a pas permis d'explorer les valeurs supérieures à 6. Nous pensons cependant que pour ce cas de voilement, il existe aussi une valeur optimum de  $\gamma$  qui donne une valeur maxi de  $k_2$ , une valeur supérieure de  $\gamma$  n'augmentant pas la stabilité de la plaque.

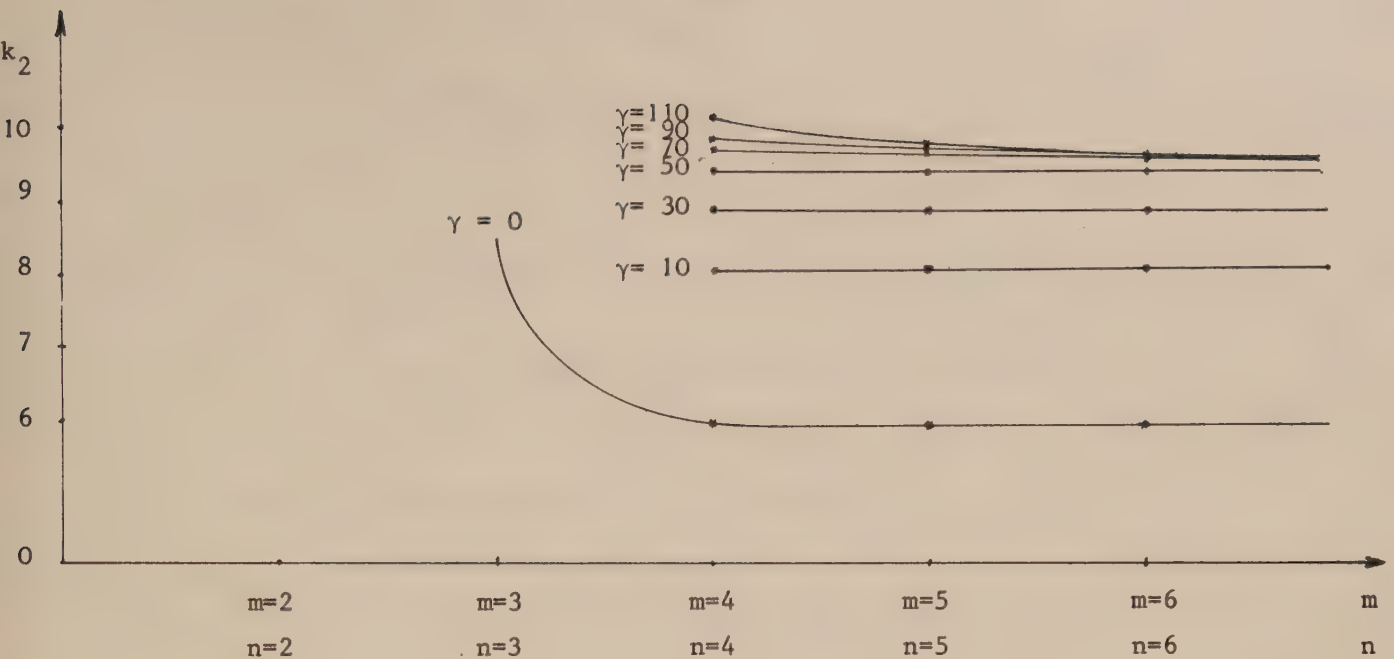


Fig. 28 - Convergence de  $k_2$  (plaque avec raidisseur-cisaillement)

Il semble au vu de ces courbes que la valeur maximum de  $k_2$  soit de l'ordre de 9,7 et qu'une valeur de  $\gamma$  supérieure à 70 n'apporte pas un gain notable sur la tenue au cisaillement d'une plaque raidie longitudinalement.

### 3.1.2.6. Plaque avec raidisseur soumise à la flexion et à l'effort tranchant

L'équation (76) est appliquée pour déterminer la valeur critique de  $k_2$  (Avec la relation  $\frac{k_1}{k_2} = 1,25$  ).

La capacité de l'ordinateur IBM 1130 ne nous a pas permis d'effectuer le calcul dans des conditions de rapidité satisfaisante. Nous nous sommes limités à examiner l'influence de la raideur relative  $\gamma = \frac{EI}{Db}$  du raidisseur sur le coefficient de voilement  $k_2$  en adoptant dans les calculs  $m = n = 6$  (valeurs qui nous avaient donné une bonne convergence dans les calculs sous flexion ou sous effort tranchant).

Les résultats de cette étude sont traduits sous forme d'une courbe à la Fig. 29.

Cette courbe montre nettement qu'une valeur élevée de  $\gamma$  n'apporte pas d'augmentation sensible sur la valeur de  $k_2$ , ce qui rejoint la notion de raidisseur strictement rigide.

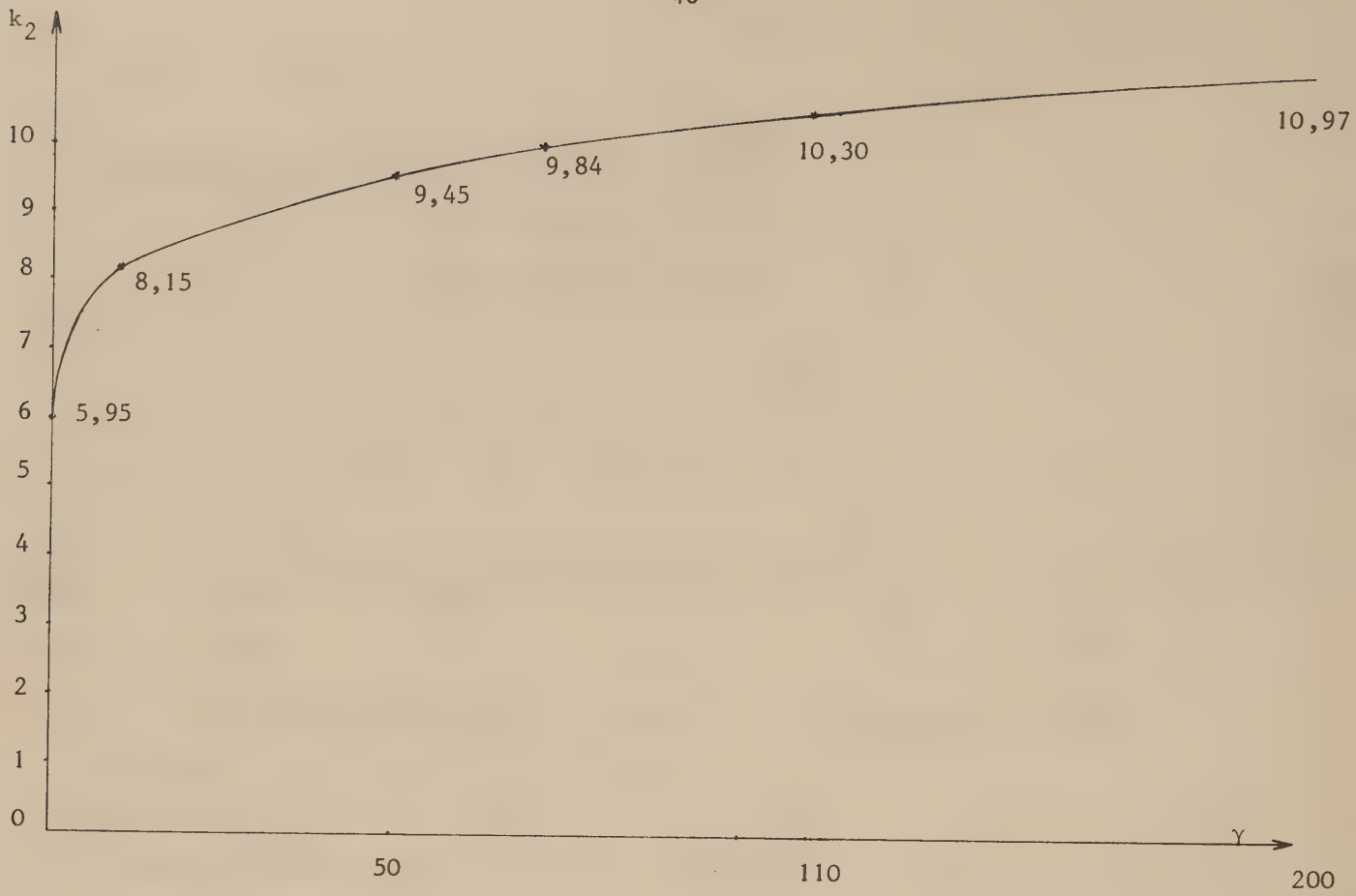


Fig. 29 - Variation de  $k_2$  en fonction de  $\gamma$   
(Plaque soumise à la flexion + cisaillement)

### 3,2 - DISCUSSION DE LA THEORIE DE BASLER

Parmi les principales hypothèses simplificatrices de la théorie de BASLER nous avons remarqué :

Pour les poutres soumises à l'effort tranchant :

- L'inclinaison à 45° sur la direction horizontale du champ de tension.
- L'absence de rigidité des semelles
- L'uniformité du champ de tension

Pour les poutres soumises à la flexion pure :

- la linéarité du rapport  $\frac{M_u}{M_e}$  en fonction de  $\beta = \frac{b}{h}$  avec limitation de  $\beta$  à une valeur unique correspondant à  $\rho = \frac{A_a}{A_m} = 0,5$ .

Nous avons d'autre part noté l'utilisation du critère de plasticité de VON MISES, peu adapté au cas des aciers comme le confirme le code ASME de construction des réacteurs nucléaires, qui lui préfère le critère de TRESCA.

Nous allons essayer de chiffrer l'influence de ces diverses hypothèses sur la résistance ultime à l'effort tranchant et au moment de flexion.

#### 3.2.1. Effort tranchant ultime

##### 3.2.1.1. Choix du critère de plasticité

Le choix d'un critère de plasticité présente toujours une certaine difficulté spécifique à chaque matériau et chargement. Il nous a semblé que pour l'acier doux, suivant en cela les prescriptions du code A.S.M.E. (Réf. 22), le critère de TRESCA traduisait le mieux le comportement du matériau dans le domaine plastique. L'expression de ce critère est :

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_e \quad (83)$$

$\sigma_I$  et  $\sigma_{II}$  étant les contraintes principales au point considéré. En se reportant à la Fig. 17 il vient :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_u + \sigma_v}{2} \pm \sqrt{\tau_u^2 + \left( \frac{\sigma_v - \sigma_u}{2} \right)^2} \quad (84)$$

Le critère de TRESCA s'écrit donc, avec les valeurs de  $\sigma_u$ ,  $\sigma_v$ ,  $\tau_{uv}$  données par les équations (23) :

$$2 \sqrt{\tau_{cr}^2 + \frac{\sigma_t^2}{4}} + \tau_{cr} \sin 2\phi \cdot \sigma_t = \sigma_e \quad (85)$$

d'où l'expression de  $\sigma_t$

$$\sigma_t = -2 \tau_{cr} \sin 2\phi + \sqrt{4 \tau_{cr}^2 \sin^2 2\phi - (4 \tau_{cr}^2 - \sigma_e^2)} \quad (86)$$

Le critère de TRESCA, impliquant  $\tau_e = \frac{\sigma_e}{2}$ , l'expression de l'effort tranchant ultime donnée par l'équation (30), rapportée à l'effort tranchant  $T_p$  correspondant à l'entrée en phase plastique des contraintes de cisaillement s'écrit sous forme exacte :

$$\frac{T_u}{T_p} = \frac{\tau_{cr}}{\tau_e} + \frac{\sigma_t}{2 \tau_e \sqrt{1+\alpha^2}} \quad (87)$$

Il est intéressant de comparer cette expression de  $\frac{T_u}{T_p}$  à celle obtenue par BASLER à partir de l'équation (34). Les résultats obtenus par cette comparaison sont traduits sous forme graphique à la Fig. 30, pour différentes valeurs de  $\alpha = \frac{a}{b}$  et de  $\sigma_o$  ( $\sigma_o = \frac{\pi^2 D}{b^2 h}$ ). Les calculs sont faits avec les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \sigma_e &= 20 \text{ hbar} & \nu &= 0,30 \\ h &= 1 \text{ mm} & E &= 20 \text{ 000 hbar} \\ k_2 &= f(\alpha) \text{ (voir courbe Fig.6)} & \sigma_o &= \frac{\pi^2 E h^2}{12(1-\nu^2)b^2} \\ b &= 400 \text{ mm} \end{aligned}$$

L'examen des courbes de la Fig. 30 montre que pour des valeurs faibles de  $\alpha$  et des valeurs élevées de  $\sigma_o$ , le critère de TRESCA conduit à des résultats plus pessimistes que ceux obtenus par VON MISES. Au contraire pour les valeurs de  $\alpha$  supérieures à 1,5 et quelle que soit la valeur de  $\sigma_o$ , nous faisons la constatation inverse. La divergence maximum est de l'ordre de 8 % pour  $\alpha = 3$  et pour les valeurs moyennes de  $\sigma_o$ .

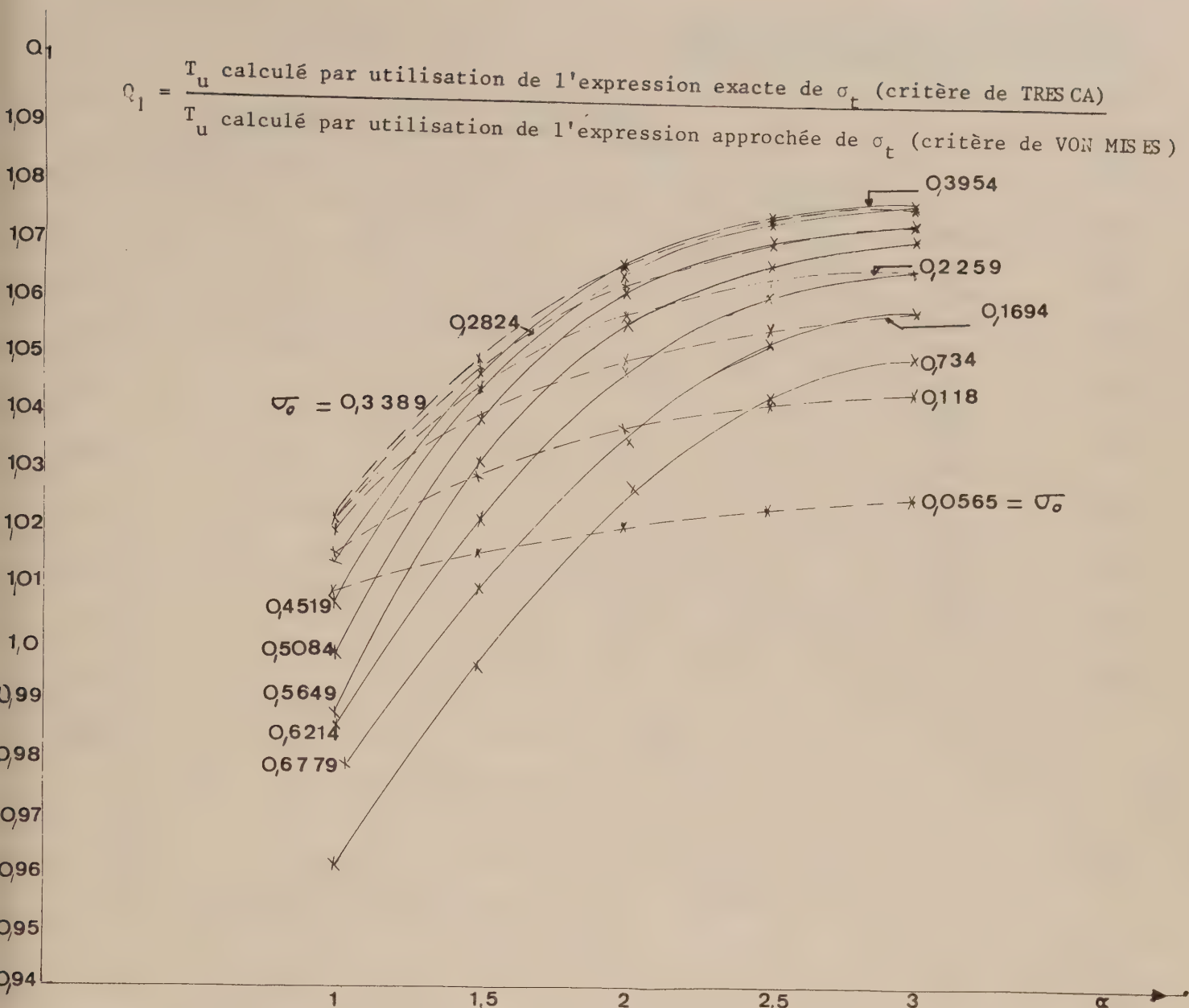


Fig. 30 Comparaison des valeurs de l'effort tranchant ultime :  $Q_1 = f(\alpha\sigma_0)$

### 3.2.1.2. Inclinaison du champ de tension à $45^\circ$

Dans sa théorie BASLER fait l'hypothèse d'un champ de tension incliné à  $45^\circ$  ce qui simplifie très sensiblement l'expression de l'effort tranchant ultime.

Nous avons dans une première étude comparé l'expression de l'effort tranchant ultime calculé en utilisant l'expression exacte de la contrainte  $\sigma_t$  à l'expression simplifiée utilisée par BASLER. (Dans ces deux cas le critère de plasticité choisi est celui de VON MISES). Les résultats de cette étude sont traduits graphiquement par les courbes de la Fig. 32. Les paramètres utilisés pour établir ces courbes sont les mêmes qu'au § 3.2.1.1. On constate que l'erreur maximale est de l'ordre de 10,5 % pour une valeur de  $\alpha = 2$  et pour les valeurs moyennes de  $\sigma_0$ .

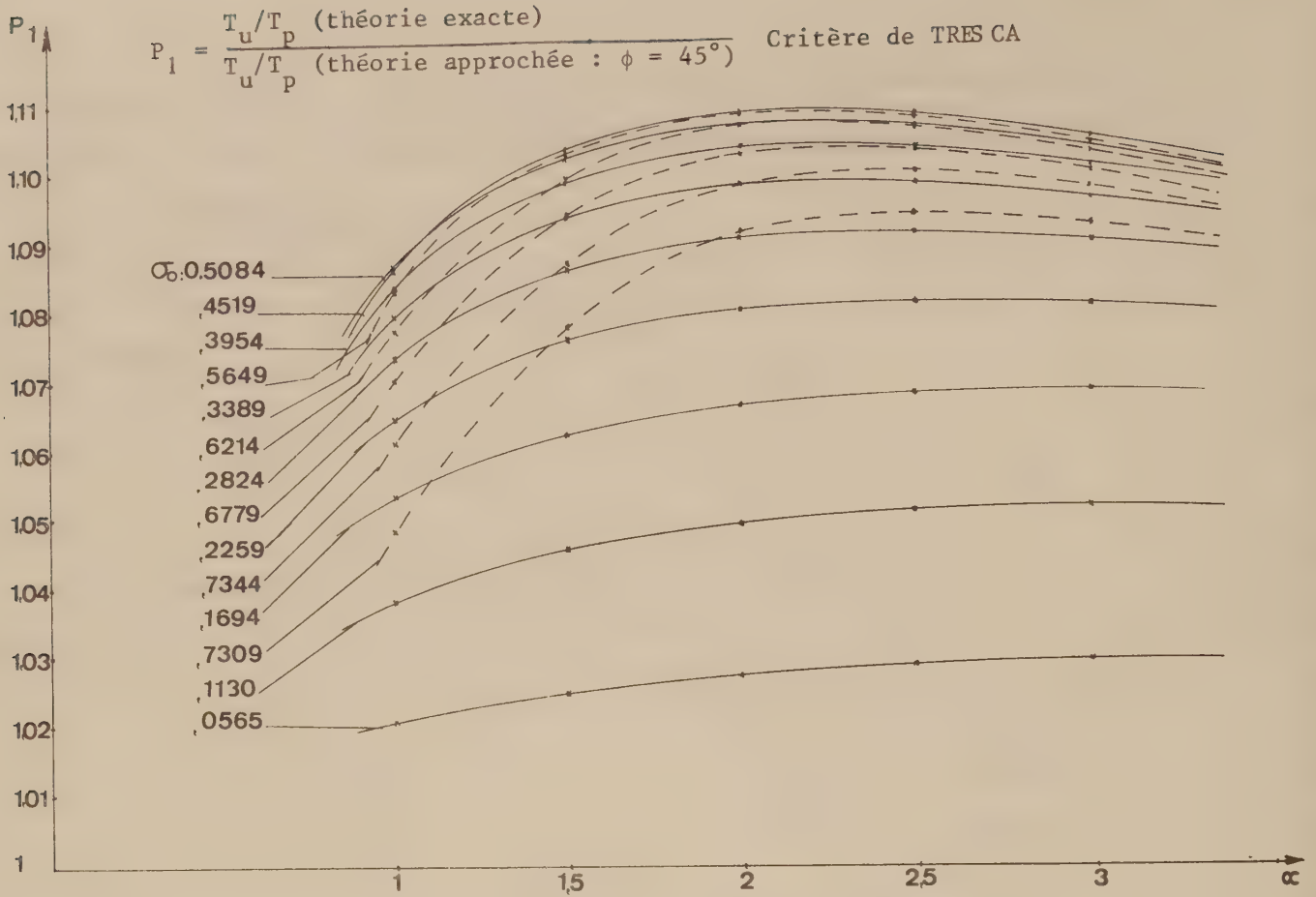


FIG: 31 Comparaison des valeurs de  $T_u/T_p$  :  $P_1 = f(\alpha, \sigma_0)$

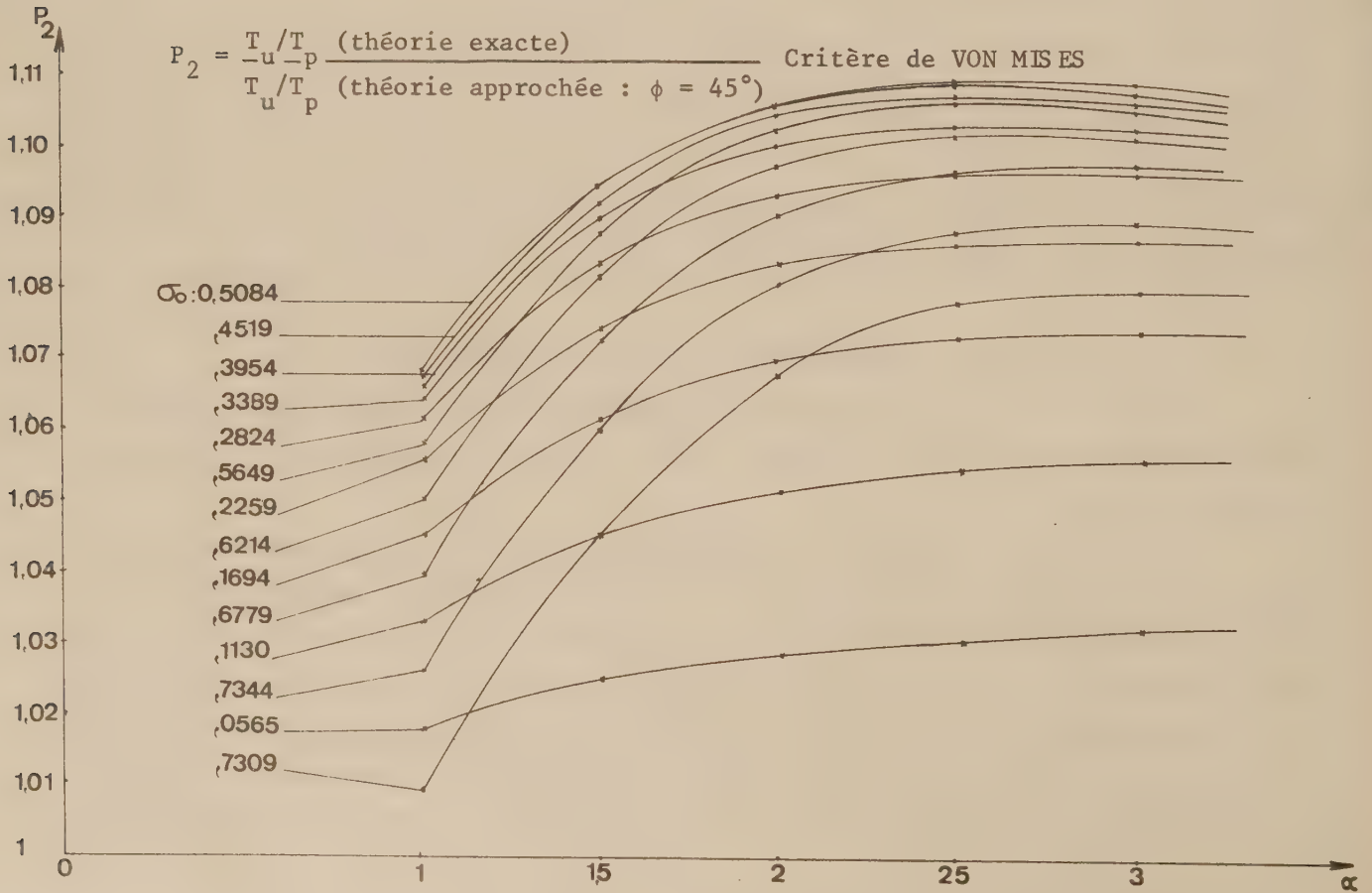


FIG: 32 Comparaison des valeurs de  $T_u/T_D$  :  $P_2 = f(\alpha, \sigma_0)$

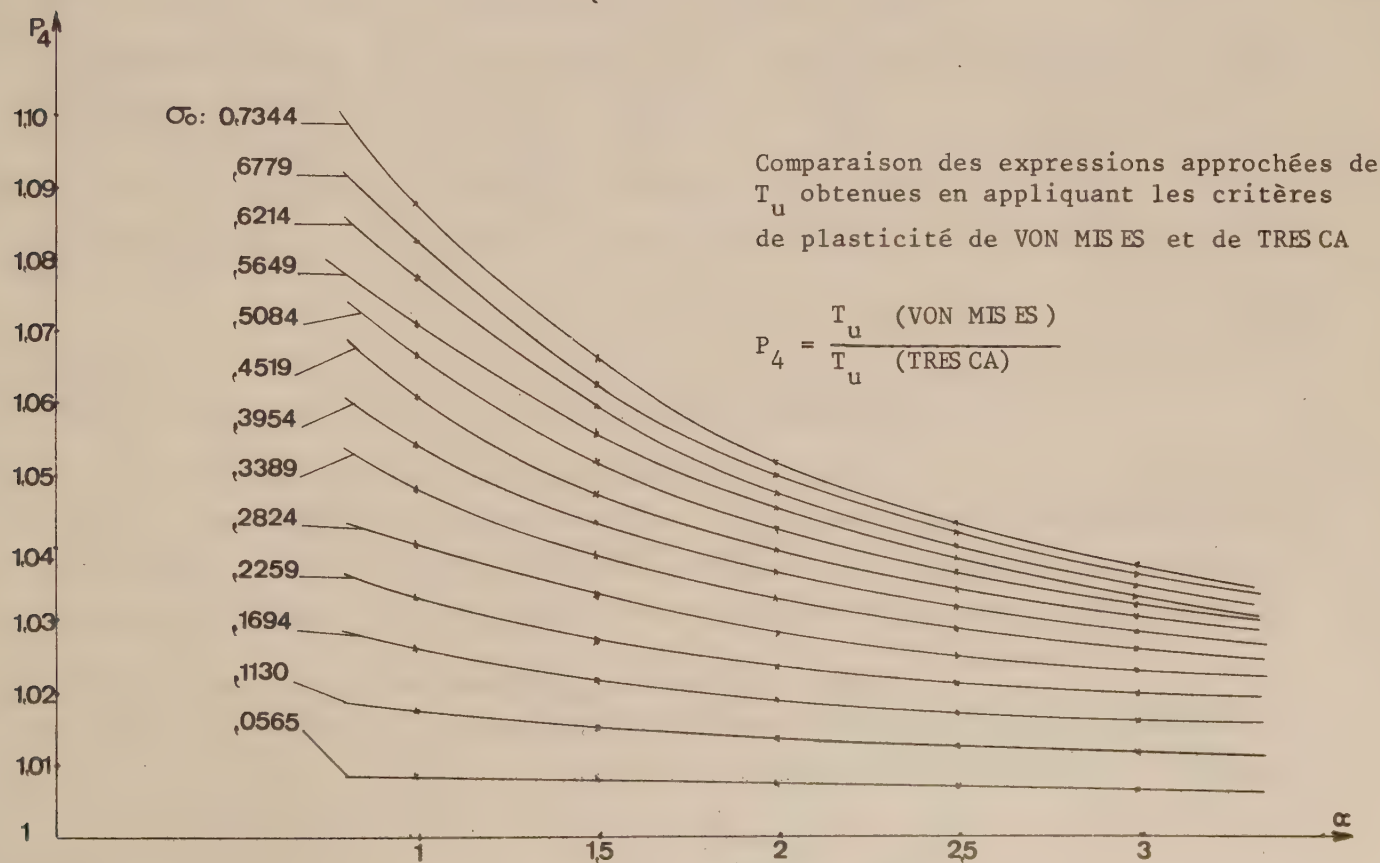
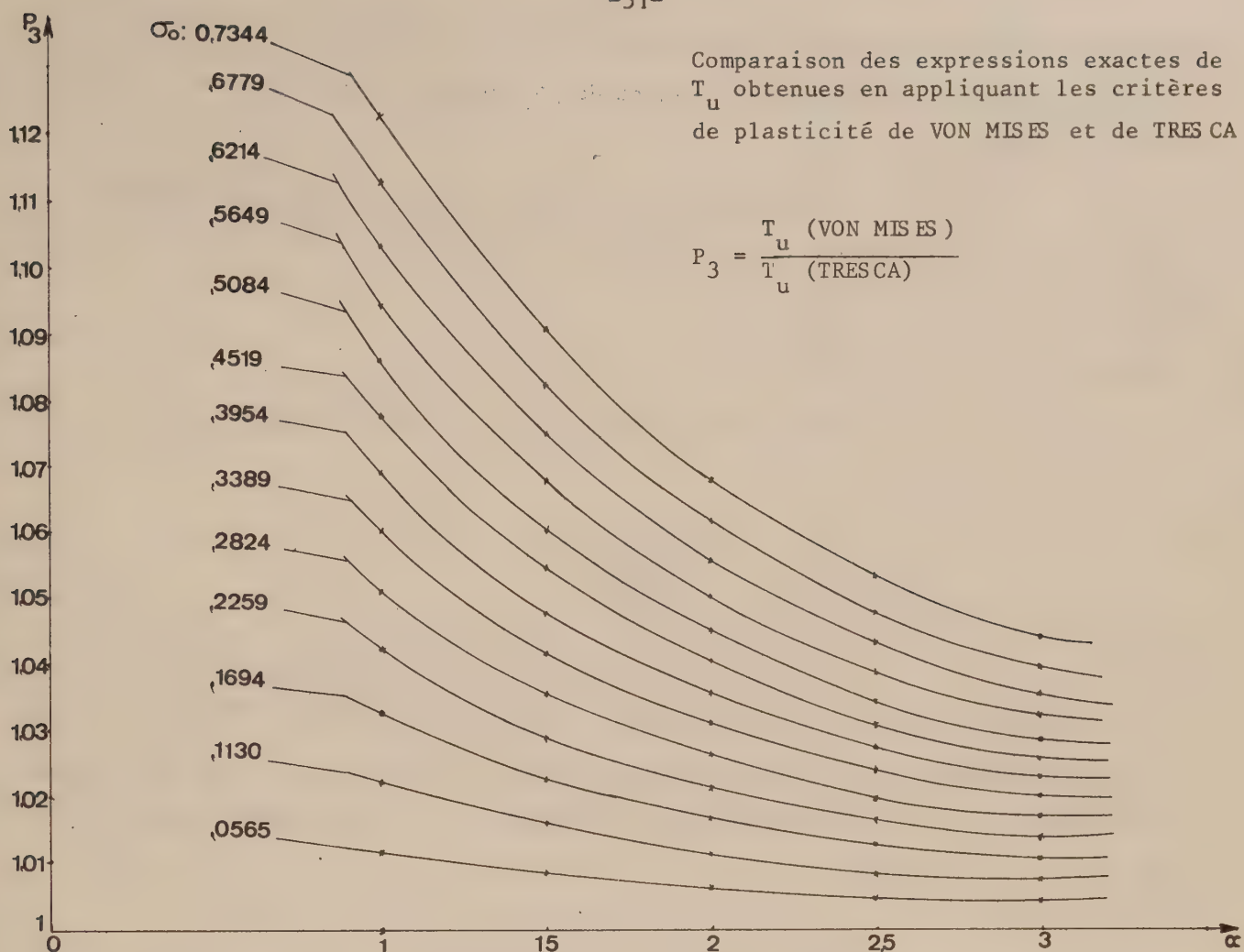


FIG: 33 Comparaison des expressions de l'effort tranchant ultime :  $P_3, P_4 = f(\alpha, \sigma_0)$

Notons que l'hypothèse  $\phi = 45^\circ$  conduit à une valeur de  $T_u/T_p$  plus pessimiste que la valeur correspondant à la valeur exacte de  $\sigma_t$  et par conséquent nous place du côté de la sécurité.

On peut appliquer la même simplification que BASLER à l'expression de  $\sigma_t$  obtenue à partir du critère de TRESCA (Equation 85). Pour  $\phi = 45^\circ$ , il vient:

$$\sigma_t = -2 \tau_{cr} + \sigma_e \quad (88)$$

L'expression (86) de  $\frac{T_u}{T_p}$  se réduit alors à :

$$\frac{T_u}{T_p} = \frac{\tau_{cr}}{\tau_e} + \frac{1 - \frac{\tau_{cr}}{\tau_e}}{\sqrt{1+\alpha^2}} \quad (89)$$

L'erreur commise en utilisant cette forme approchée de  $\sigma_t$  pour la détermination de  $\frac{T_u}{T_p}$  peut être calculée pour différentes valeurs de  $\alpha$  et de  $\sigma_o$ . Les résultats de cette étude comparative sont représentés sous forme de courbes à la figure 31. On constate que l'ordre de grandeur de l'erreur ainsi commise est le même que lors de l'application du critère de plasticité de VON MISES, et que les résultats obtenus, en se plaçant à  $\phi = 45^\circ$ , sont du côté de la sécurité.

Nous avons par ailleurs tracé deux réseaux de courbes montrant la différence existant entre les expressions de l'effort ultime obtenues en utilisant le critère de VON MISES et le critère de TRESCA (voir Fig. 33). Ces deux réseaux de courbes correspondent respectivement aux expressions exactes de l'effort tranchant ultime, et aux expressions approchées obtenues en se plaçant à  $\phi = 45^\circ$ . On constate que la différence est importante pour les basses valeurs de  $\alpha$  et pour les valeurs élevées de  $\sigma_o$  (de l'ordre de 10 à 12 %) et qu'elle est minimum pour les valeurs plus élevées de  $\alpha$  (de l'ordre de 4 à 6 %).

### 3.2.1.3. Rigidité des semelles

La théorie de BASLER néglige la raideur de flexion des semelles. On peut se rendre compte de la validité de cette hypothèse par le calcul élémentaire suivant. Soit  $\sigma_j$  la composante verticale de la contrainte s'exerçant sur la semelle. (On suppose cette contrainte normale sur toute la longueur du panneau).

La force par unité de longueur due à  $\sigma_j$  a pour valeur  $\sigma_j \cdot h$  et le moment maximum engendré par cette force en supposant la semelle simplement appuyée sur les raidisseurs verticaux a pour valeur :

$$M_f = \frac{\sigma_j \cdot h \cdot a^2}{8} \quad (90)$$



2°) On peut supposer que ces contraintes de traction agissant avec une valeur moyenne  $\sigma_t$  sur une bande diagonale dont la largeur serait une fraction  $\xi$  de la largeur  $b$  du panneau, l'inclinaison du champ de tension serait alors  $\theta$  tel que :

$$\theta = \arctg. \frac{b}{a} \quad (93)$$

et la composante verticale de la force de traction s'écrirait alors :

$$T_\sigma = \xi \cdot b \cdot h \cdot \sigma_t \cdot \sin \theta$$

$$\text{d'où } T_\sigma = \xi \cdot b \cdot h \cdot \sigma_t \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \quad (94)$$

On note que pour la valeur  $\xi = 0,5$ , on retrouve la valeur de  $T_\sigma$  calculée à partir de l'existence d'un champ de tension incliné de  $\phi$  sur l'horizontale.

Il semble donc que ce modèle du champ de tension (inclinaison  $\theta$ , largeur  $\frac{b}{2}$ ) soit le plus intéressant puisqu'il est une approximation raisonnable du comportement réel du panneau et qu'il conduit à une expression de la force de cisaillement qui est en bonne corrélation avec les résultats expérimentaux.

### 3.2.2. Moment de flexion ultime

#### 3.2.2.1. Valeur limite maximum du coefficient de finesse $\beta$ , vis-à-vis du flambage vertical

La valeur limite de  $\beta_B$  a été donnée par l'équation (39)

$$\beta_B = \frac{b}{h} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{24(1-\nu^2)}} \cdot \frac{A_a}{A_m} \cdot \frac{1}{\sigma_a \varepsilon_a}$$

Dans le but de définir une loi générale, applicable au domaine de calcul utilisé le plus souvent, BASLER limite le calcul de  $\beta_B$  à la valeur  $\rho = \frac{A_a}{A_m} = 0,5$ . Cette hypothèse peut sembler trop simplificatrice, voire illogique, puisqu'en fait l'expression non dimensionnelle de  $M_u$  tient compte du paramètre  $\rho$  variable. Si l'on admet une variation linéaire de  $\frac{M_u}{M_e}$  entre  $\beta_A$  et  $\beta_O$  d'une part,  $\beta_O$  et  $\beta_B$  d'autre part, le diagramme  $\frac{M_u}{M_e} = f(\beta)$  aura l'allure indiquée à la Fig. 36.

Ce diagramme est donc essentiellement composé de deux demi-droites définies par les points de coordonnées  $\left[ \beta_A, \left( \frac{M_u}{M_e} \right)_{\beta_A} \right]$   $\left[ \beta_O, \left( \frac{M_u}{M_e} \right)_{\beta_O} = 1 \right]$ ,  $\left[ \beta_B, \left( \frac{M_u}{M_e} \right)_{\beta_B} \right]$ . On peut comparer les résultats obtenus par cette construction à ceux

obtenus par la droite de BASLER à l'aide d'un exemple en précisant au préalable les modalités de calcul de  $\frac{M_u}{M_e}$ .

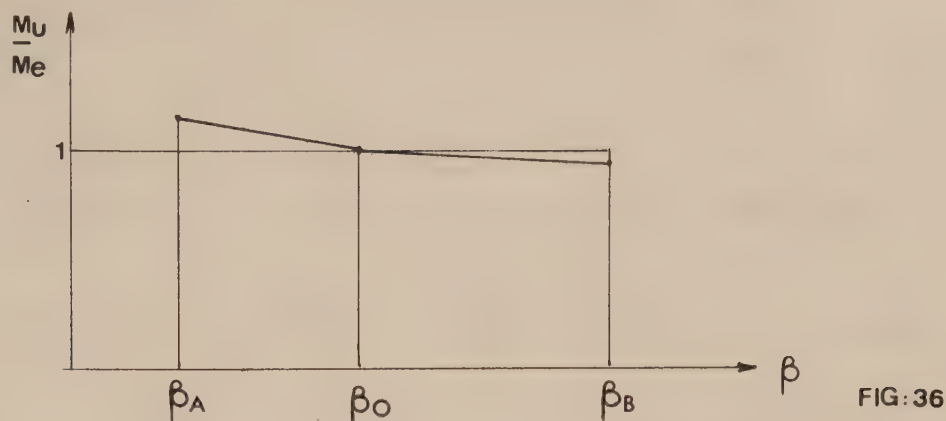


FIG: 36

### 3.2.2.2. Calcul du rapport $\frac{M_u}{M_e}$ pour les valeurs limites des coefficients de finesse

\* Valeur limite supérieure de  $\frac{M_u}{M_e}$  pour  $\beta = \beta_A$

Pour  $\beta = \beta_A$ , le moment plastique  $M_p$  peut se développer dans toute la section. Le principe de l'équivalence permet d'écrire :

$$M_p = \sigma_e \cdot A_m \cdot b \cdot \left(1 + \frac{\rho}{4}\right) = M_u \quad (95)$$

En rapportant ce moment au moment  $M_e$  correspondant à l'entrée en phase plastique des fibres extrêmes de la section

$$M_e = \sigma_e \cdot A_m \cdot b \cdot \left(1 + \frac{\rho}{6}\right) \quad (96)$$

il vient

$$\frac{M_u}{M_e} = \frac{1 + \frac{\rho}{4}}{1 + \frac{\rho}{6}} \quad (97)$$

\* Valeur limite inférieure de  $\frac{M_u}{M_e}$  pour  $\beta = \beta_B$

Suivant les observations expérimentales de BASLER, il semble que l'on puisse associer une hauteur d'âme égale à 30 fois son épaisseur à la membrure comprimée lorsque  $\beta > \beta_0$ .

La section à considérer est représentée Fig. 37.

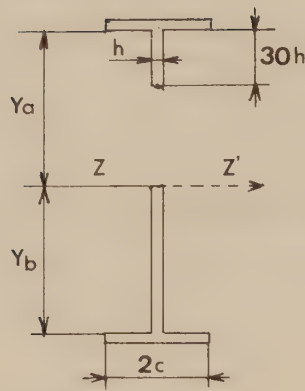


FIG:37

$y_b$  = distance de la fibre neutre à la semelle comprimée

$$y_a = b - y_b$$

$$\psi = \frac{30}{\beta_B}$$

$$\eta_b = \frac{y_b}{b}$$

$$A_m \cdot y_b + h y_b \cdot \frac{y_b}{2} = A_m (b - y_b) + \psi \cdot b \cdot h \cdot [b (1 - \frac{\psi}{2}) - y_b]$$

$$y_b = 2b \left[ \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{2} + \psi \right) + \frac{\psi}{2}} - \left( \frac{1}{\rho} + \frac{\psi}{2} \right) \right] \quad (98)$$

$$\eta_b = \frac{y_b}{b} = 2 \left[ \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{2} + \psi \right) + \frac{\psi}{2}} - \left( \frac{1}{\rho} + \frac{\psi}{2} \right) \right] \quad (99)$$

Calcul du moment d'inertie de la section par rapport à z z'

$$I_z = A_m \cdot y_b^2 + \frac{1}{3} y_b^3 \cdot h + A_m (b - y_b)^2 + \psi \cdot b \cdot h \left[ b \left( 1 - \frac{\psi}{2} \right) - y_b \right]^2 \quad (100)$$

Module de section

$$\frac{I_z}{y_a} = \frac{A_m \cdot b}{1 - \eta_b} \left[ \eta_b^2 + \frac{1}{3} \rho \cdot \eta_b^3 + (1 - \eta_b)^2 + \rho \psi \left[ \left( 1 - \frac{\psi}{2} \right) - \eta_b \right]^2 \right] \quad (101)$$

$$\text{avec } M_u = \sigma_e \cdot \frac{I_z}{y_a} \quad (102)$$

$$\text{il vient } \frac{M_u}{M_e} = \frac{\eta_b^2 + \frac{\rho}{3} \eta_b^3 + (1 - \eta_b)^2 + \rho \cdot \psi \left[ \left( 1 - \frac{\psi}{2} \right) - \eta_b \right]^2}{(1 - \eta_b) \left( 1 + \frac{\rho}{6} \right)} \quad (103)$$

### 3.2.2.3. Comparaison des résultats obtenus par la droite de BASLER avec ceux obtenus en utilisant deux demi-droites

Une étude comparative de ces deux interprétations a été faite sur un acier de caractéristiques :

$$\begin{aligned} E &= 20\,000 \text{ hbar} & \nu &= 0,3 \\ \sigma_e &= 20 \text{ hbar} & \sigma_R &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_A &= 60 \\ \beta_O &= 181 \end{aligned}$$

$$p_1 = \frac{\frac{M_u}{M_e} (\beta = \beta_B) - 1}{\beta_B - \beta_0} \quad \text{avec la loi de variation de BASLER}$$

$$p_2 = \frac{\frac{M_u}{M_e} (\beta = \beta_B) - 1}{\beta_B - \beta_0} \quad \text{avec la loi de variation tenant compte de } \beta = f(\rho)$$

Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous.

| $\rho = \frac{A_a}{A_m}$ | $\frac{M_u}{M_e} (\beta = \beta_A)$ | BASLER    |                                     |                 | DEMI-DROITES |                                     |                |
|--------------------------|-------------------------------------|-----------|-------------------------------------|-----------------|--------------|-------------------------------------|----------------|
|                          |                                     | $\beta_B$ | $\frac{M_u}{M_e} (\beta = \beta_B)$ | $p_1$           | $\beta_B$    | $\frac{M_u}{M_e} (\beta = \beta_B)$ | $p_2$          |
| 0,5                      | 1,04                                | 475       | 0,885                               | $3,91.10^{-4}$  | 475          | 0,933                               | $2,27.10^{-4}$ |
| 1                        | 1,07                                | 475       | 0,805                               | $6,63.10^{-4}$  | 672          | 0,868                               | $2,68.10^{-4}$ |
| 1,5                      | 1,095                               | 475       | 0,723                               | $9,42.10^{-4}$  | 823          | 0,810                               | $2,95.10^{-4}$ |
| 2                        | 1,12                                | 475       | 0,717                               | $9,62.10^{-4}$  | 950          | 0,762                               | $3,09.10^{-4}$ |
| 2,5                      | 1,145                               | 475       | 0,639                               | $12,62.10^{-4}$ | 1062         | 0,718                               | $3,20.10^{-4}$ |
| 3                        | 1,17                                | 475       | 0,619                               | $12,95.10^{-4}$ | 1163         | 0,681                               | $3,24.10^{-4}$ |

Les courbes tracées sur la Fig. 38 à partir de ces résultats montrent que l'approximation de BASLER conduit à une réduction trop importante des contraintes de flexion admissibles, en particulier pour les fortes valeurs de  $\rho$ . Cette méthode conduit donc à des résultats du "côté de la sécurité" mais résolument pessimistes.

A titre de comparaison, nous avons indiqué dans le tableau ci-après les valeurs de  $\frac{M_u}{M_e}$  obtenues pour quelques valeurs de  $\beta$  et de  $\rho$ .

| $\beta$       | $\rho$       | $A = \frac{M_u}{M_e}$ suivant<br>droite de BASLER | $B = \frac{M_u}{M_e}$ suivant<br>droite $f(\beta, \rho)$ | Comparaison<br>$\frac{B - A}{B} \times \%$ |
|---------------|--------------|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $\beta = 150$ | $\rho = 0,5$ | 1,01                                              | 1,01                                                     | 0 %                                        |
|               | $\rho = 1,5$ | 1,02                                              | 1,02                                                     | 0 %                                        |
|               | $\rho = 3$   | 1,05                                              | 1,04                                                     | 0,8 %                                      |
| $\beta = 300$ | $\rho = 0,5$ | 0,94                                              | 0,97                                                     | 3 %                                        |
|               | $\rho = 1,5$ | 0,82                                              | 0,965                                                    | 15 %                                       |
|               | $\rho = 3$   | 0,64                                              | 0,96                                                     | 33 %                                       |
| $\beta = 600$ | $\rho = 0,5$ |                                                   |                                                          |                                            |
|               | $\rho = 1,5$ |                                                   | 0,875                                                    |                                            |
|               | $\rho = 3$   |                                                   | 0,86                                                     |                                            |

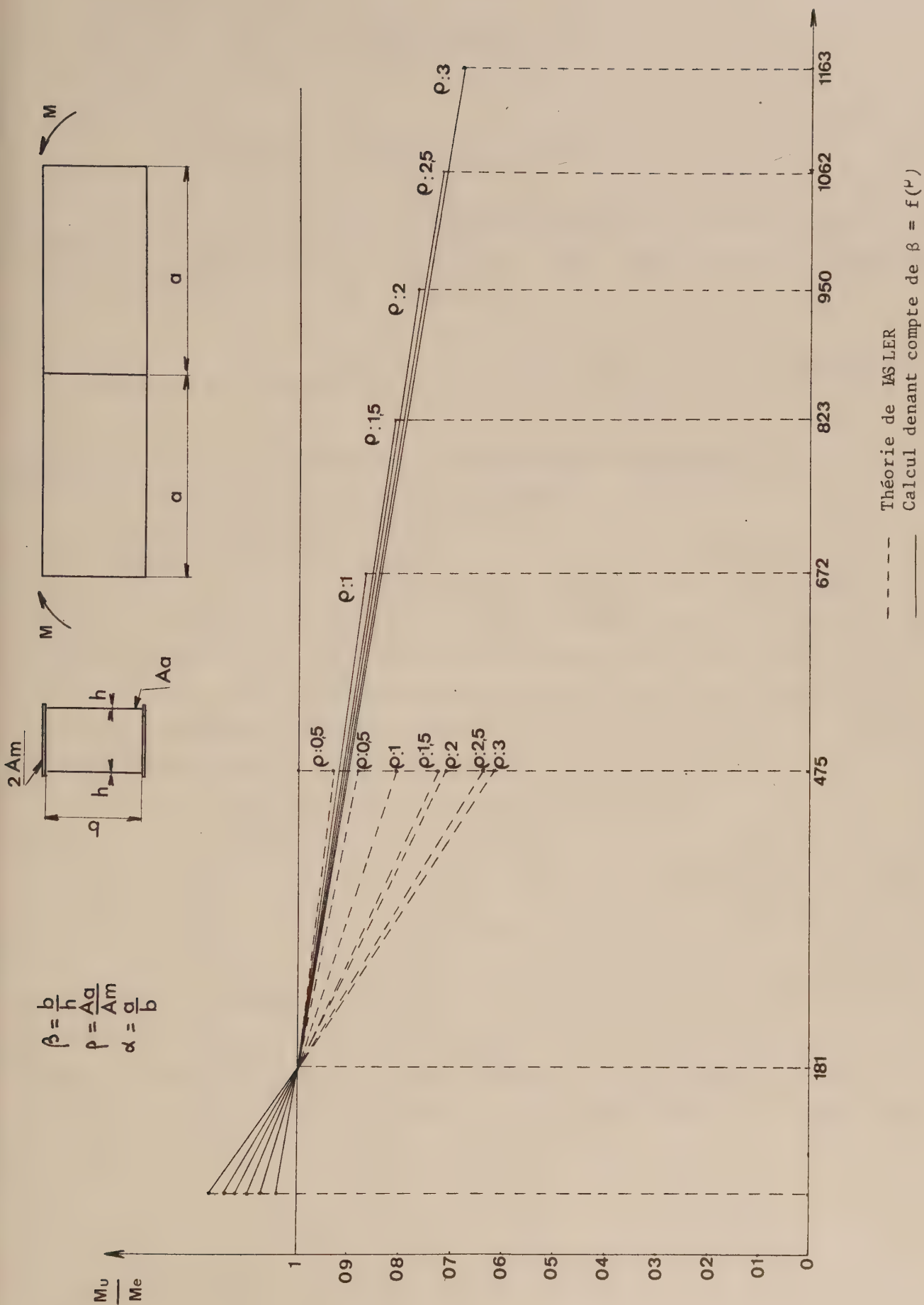


FIG: 38 - Variation de  $M_u/M_e = f(\beta, \rho)$



## ETUDE EXPERIMENTALE

-:-:-

Nos expériences avaient pour but :

- d'étudier le comportement des âmes de poutres caissons sous l'effort tranchant et sous moment de flexion dans la période post critique, vis-à-vis du voilement au sens de TIMOSHENKO.

- de vérifier le comportement annoncé par BASLER en précisant l'influence de ses diverses hypothèses simplificatrices.

- de déterminer l'influence d'un raidissage longitudinal sur la résistance ultime des âmes d'une poutre caisson.

### 4.1 - CHOIX D'UN PROGRAMME D'ESSAI -

Nous avons fait réaliser 7 poutres d'essais planes ou raidies sur lesquelles nous avons fait des essais de cisaillement et de flexion jusqu'à rupture.

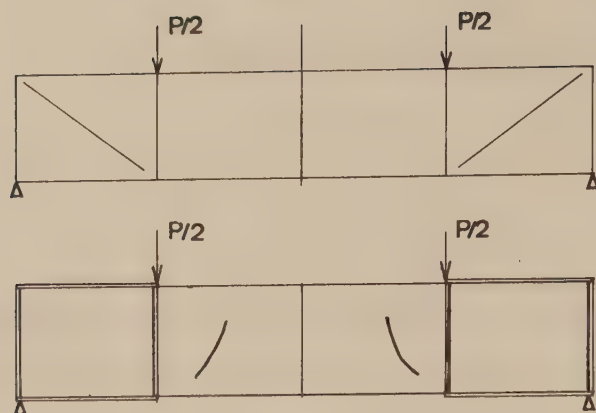
Notre souci a été de faire réaliser des poutres d'une géométrie aussi parfaite que possible, en évitant de plus l'apparition de contraintes résiduelles lors de l'assemblage des différents éléments.

Nous avons adopté le programme d'essais suivant :

- 1°) Une série d'essais sur 3 poutres de 2 mètres de longueur destinée à faire apparaître un mode de liaison âme semelle qui soit suffisamment résistant et qui n'engendre pas de contraintes résiduelles.

- 2°) Une série d'essais sur 2 poutres de 2 mètres et 2 poutres de 4 mètres destinée à analyser le phénomène du voilement et la détermination des charges ultimes. Notons que les poutres de 4 mètres ont d'abord servi à l'analyse du comportement des panneaux soumis à l'effort tranchant et après rupture de ces panneaux, elles ont été renforcées aux extrémités et ont permis l'analyse du comportement des panneaux soumis à la flexion pure. (voir Fig. 39).

Fig. 39



Ruine de la poutre  
sous l'action de  
l'effort tranchant

Renforcement des pan-  
neaux d'extrémité pour  
essais de flexion pure

## 4.2 - CARACTERISTIQUES DES POUTRES D'ESSAIS -

### 4.2.1. Constitution des poutres

Les définitions géométriques de chaque type de poutre sont montrées à la Fig. 40.

Les essais sur poutres 1, 2, 4 n'ont pas permis de déterminer la charge ultime que pouvaient supporter les panneaux de la poutre caisson par suite de ruptures locales des différents éléments constituant la poutre.

La ruine des poutres 1 et 2 a été occasionnée par un poinçonnement de la semelle inférieure par le raidisseur recevant la charge, tandis que la poutre 3 a péri par cisaillement des vis d'assemblage âme-semelle.

Après ces essais, nous avons adopté la conception suivante pour les poutres 5, 6, 7 et 8.

- Ames réalisées en tôle d'acier d'épaisseur nominale 1 mm, pliées et soudées par points sur les semelles d'épaisseur 4 mm (pas des points de soudure 30 mm,  $\phi$  des points de soudure 5 mm). Une vis de fixation  $\phi$  4 mm tous les 20 mm, facilite le montage.

- Le raidisseur embouti (sur poutres 2, 6, 8) a la forme suivante :

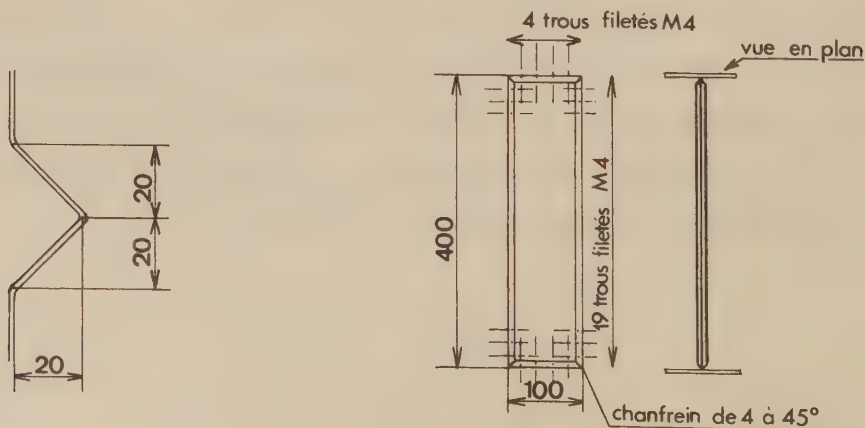
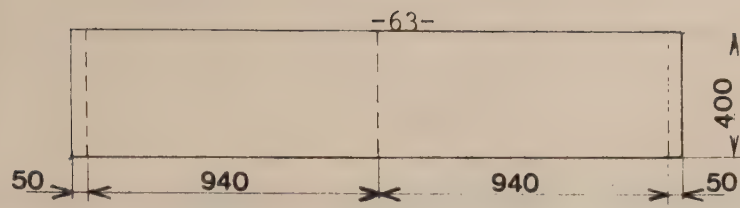
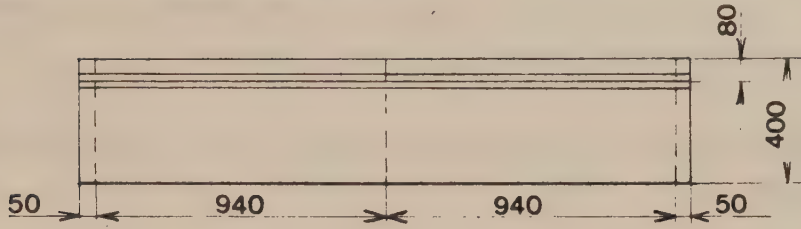


FIG. 41



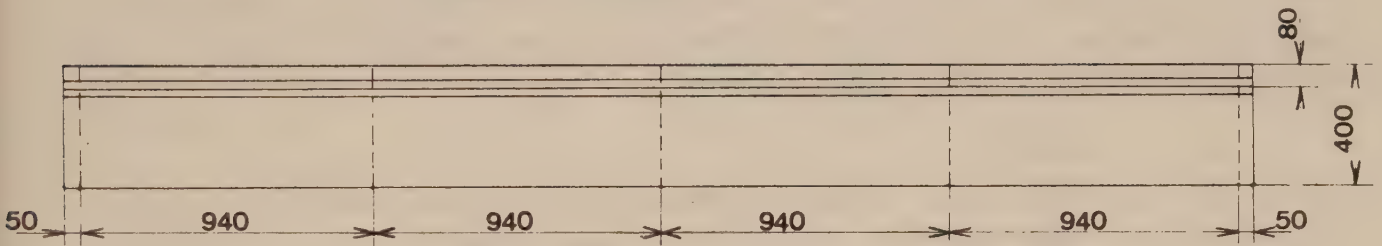
SCHEMA POUTRES : 1 , 3 , 5



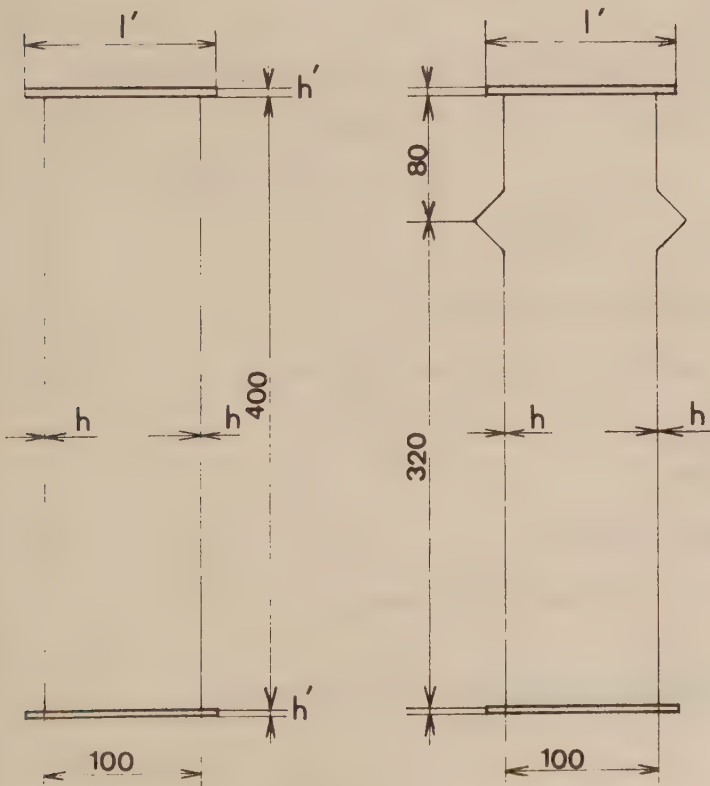
SCHEMA POUTRES : 2 , 6



SCHEMA POUTRE : 7



SCHEMA POUTRE : 8



| Poutre | h | l'  | h' |
|--------|---|-----|----|
| 1      | 2 | 120 | 2  |
| 2      | 2 | 120 | 2  |
| 3      | 2 | 120 | 4  |
| 5      | 1 | 140 | 4  |
| 6      | 1 | 140 | 4  |
| 7      | 1 | 140 | 4  |
| 8      | 1 | 140 | 4  |

FIG:40 - Définitions géométriques des poutres d'essais

- Les raidisseurs transversaux, volontairement surdimensionnés sont constitués par des plaques pleines de 10 mm d'épaisseur, chanfreinées à 45° sur tout leur contour. La fixation de ces plaques sur les âmes et les semelles est assurée au moyen de vis (pas : 20 mm).

#### 4.2.2. Caractéristiques utilisées pour le calcul de la résistance des poutres d'essais

Nous distinguerons :

1 - L'inertie des sections droites par rapport à l'axe portant le moment de flexion.

2 - L'inertie du raidisseur

L'inertie à prendre en compte pour les calculs de voilement est calculée de la façon suivante : On suppose qu'une partie de l'âme est associée au raidisseur pour s'opposer au déplacement latéral de l'âme. Suivant les propositions couramment admises, on associe une bande de largeur 30 h de part et d'autre du raidisseur. Un tel ensemble est représenté FIG. 42.

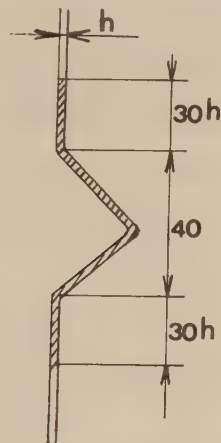


FIG:42

L'inertie du raidisseur I sera exprimée par le nombre sans dimension :

$$\gamma = \frac{EI}{D.b}$$

où D, représente la rigidité de la plaque  
b, " largeur " " "  
E, " le module d'Young du matériau.

3 - L'aire de la membrure associée à une âme.

Elle sera caractérisée par le paramètre sans dimension

$$\rho = \frac{A_a}{A_m}$$

où  $A_a$  , représente l'aire de l'âme

$A_m$  , " " " la membrure associée

Ces caractéristiques figurent dans le tableau ci-après.

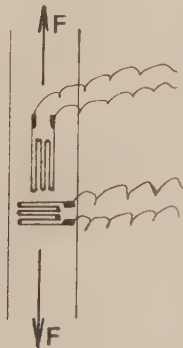
| Poutres n°                                      | 1        | 2        | 3        | 5        | 6        | 7        | 8        |
|-------------------------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Inertie de la section droite (mm <sup>4</sup> ) | 43925974 | 44410422 | 63706454 | 59343466 | 59585688 | 59343466 | 59585688 |
| Inertie du raidisseur (mm <sup>4</sup> )        | 0        | 10877    | 0        | 0        | 4062     | 0        | 4062     |
| $\gamma$                                        | 0        | 37       | 0        | 0        | 111      | 0        | 111      |
| Aire membrure associée (mm <sup>2</sup> )       | 120      | 120      | 240      | 280      | 280      | 280      | 280      |
| $\rho$                                          | 6,66     | 6,66     | 3,33     | 1,29     | 1,29     | 1,29     | 1,29     |

#### 4.2.3. Caractéristiques des matériaux

Des essais de traction sur éprouvettes découpées dans la tôle servant à la réalisation des âmes des poutres caissons ont été réalisées pour déterminer les caractéristiques des matériaux. On a ainsi pu mettre en évidence les propriétés suivantes :

- La tôle utilisée était pratiquement isotrope (bonne corrélation des résultats obtenus pour les mesures de dilatations linéiques sur les éprouvettes prises dans deux directions perpendiculaires dans la tôle.

- Très bonne reproductibilité des essais. Sur chaque éprouvette étaient collées 4 jauges : 2 dans la direction de l'effort de traction et 2 dans la direction perpendiculaire. (Ces jauges étaient disposées par couple sur chacune des faces de l'éprouvette afin d'éliminer autant que possible un éventuel phénomène de flexion parasite).



Les valeurs moyennes obtenues par ces essais sont respectivement :

$$E = 20\ 000 \text{ hbar}$$

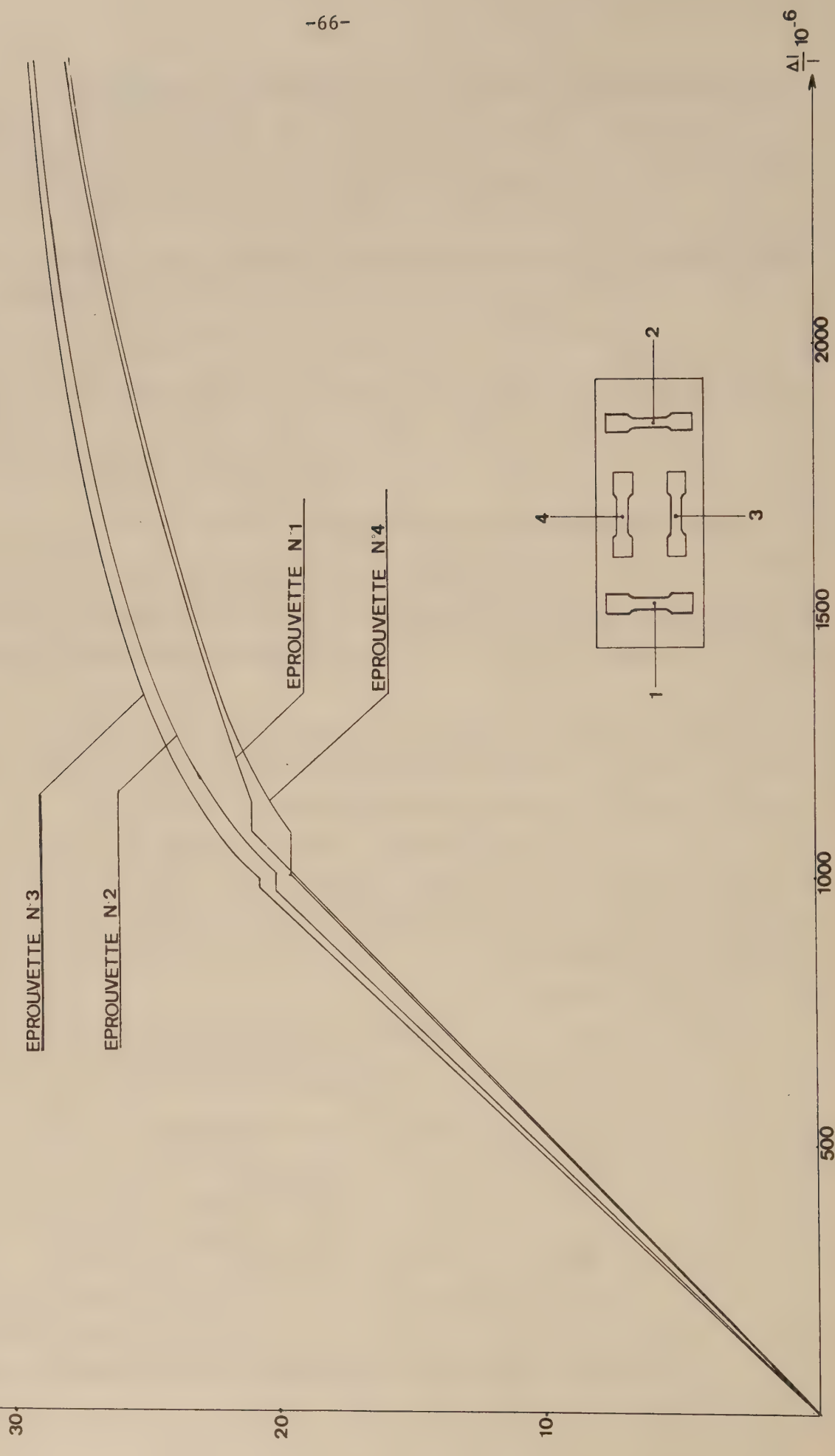
$$\nu = 0,30$$

$$\sigma_e = 20 \text{ hbar}$$

$$\sigma_R = 31,5 \text{ hbar}$$

La Fig. 43 montre l'allure des courbes  $\epsilon = f(\sigma)$  sur 4 éprouvettes prises dans la tôle constituant les âmes de poutres.

Fig. 43 - Détermination des caractéristiques des matériaux



#### 4.3 - TYPES D'ESSAIS - MATERIEL EXPERIMENTAL -

Nous avons réalisé les deux types de chargement schématisés au Chapitre I, à la Fig. 5. Des photos des montages correspondant sont présentées aux Fig. 44 et 45. Le bâti d'essai a été entièrement réalisé au laboratoire. La force était appliquée au moyen d'un verin hydraulique ENERPAC développant une force de  $35.10^4$  Newton, sous une pression de 700 bar. La pression était obtenue et maintenue constante à l'aide d'un dynamomètre à pendule AMSLER PM 103. L'indication précise de la force appliquée était obtenue au moyen d'un peson électronique PHILIPS PR 9226, relié à un indicateur de force PR 1240 P donnant une précision de 200 N sur les charges appliquées. Des photos de ces différents appareillages sont présentées aux Fig. 46 et 47.

#### 4.4 - RESULTATS EXPERIMENTAUX -

##### 4.4.1. Flèches verticales au milieu des poutres

Les résultats expérimentaux sont traduits sur la Fig. 48 par les courbes  $F = f(P)$ . Ces courbes montrent que la théorie des poutres n'est pas applicable au cas des poutres caissons dont les âmes possèdent un coefficient de finesse élevé. Les flèches théoriques (fonction linéaire de  $P$ ) ont été calculées en faisant l'hypothèse d'une répartition uniforme du cisaillement dans les âmes. (L'hypothèse se justifie d'autant que le rapport  $\frac{A_a}{A_m}$  est faible). Les flèches verticales ont été mesurées et corrigées en tenant compte du tassement des appuis, lui même mesuré à l'aide de comparateurs situés au voisinage immédiat des appuis. Nous avons constaté que :

- 1°) Les flèches réelles prises par les poutres peuvent être supérieures de 2 ou 3 fois aux flèches théoriques.
- 2°) Les flèches des poutres comportant un raidisseur ( $n^\circ$  pair) sont sensiblement inférieures aux flèches des poutres non raidies ( $n^\circ$  impair).

Il semble donc que le fait d'utiliser un raidisseur longitudinal rapproche la théorie des poutres. Notons que les poutres à coefficient de finesse élevé (Poutres 5, 6, 7, 8) ont un comportement très différent de la théorie des poutres. Au contraire pour les poutres à coefficient de finesse moins élevé, la divergence vis-à-vis de la théorie des poutres est moindre.

##### 4.4.2. Flèches latérales

Les flèches latérales ont été relevées en différentes sections des poutres d'essais. Nous avons représenté sur 2 schémas les numéros de référence des panneaux (Fig. 49). Les mesures ont été effectuées sur une verticale passant par le centre de ces panneaux.



Fig. 44 - Essais sur poutres de 2 mètres

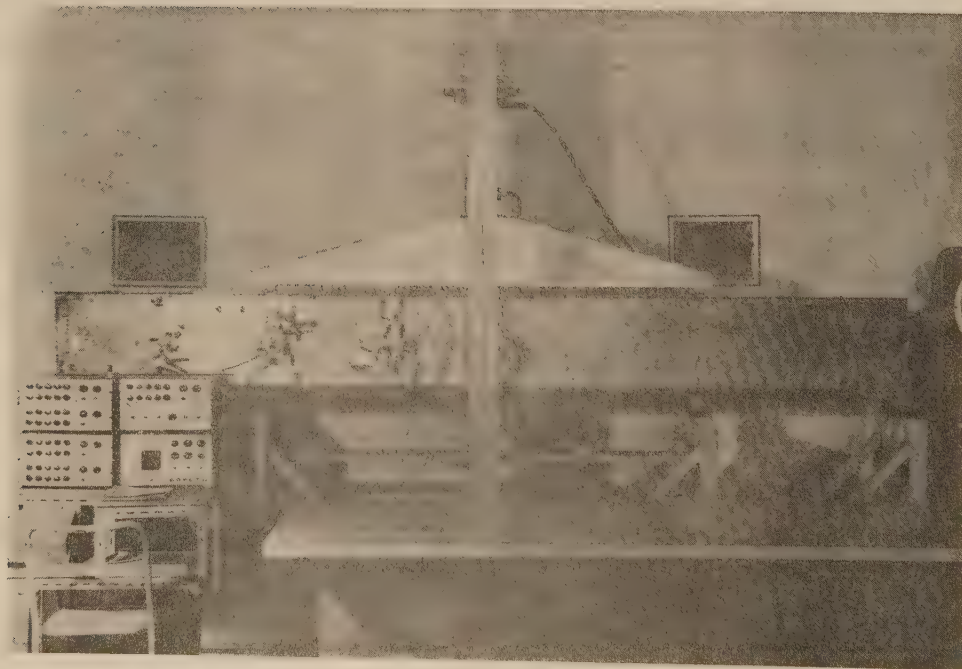


Fig. 45 - Essais sur poutres de 4 mètres

vérin  
peson  
câble de liaison à l'indicateur  
de force

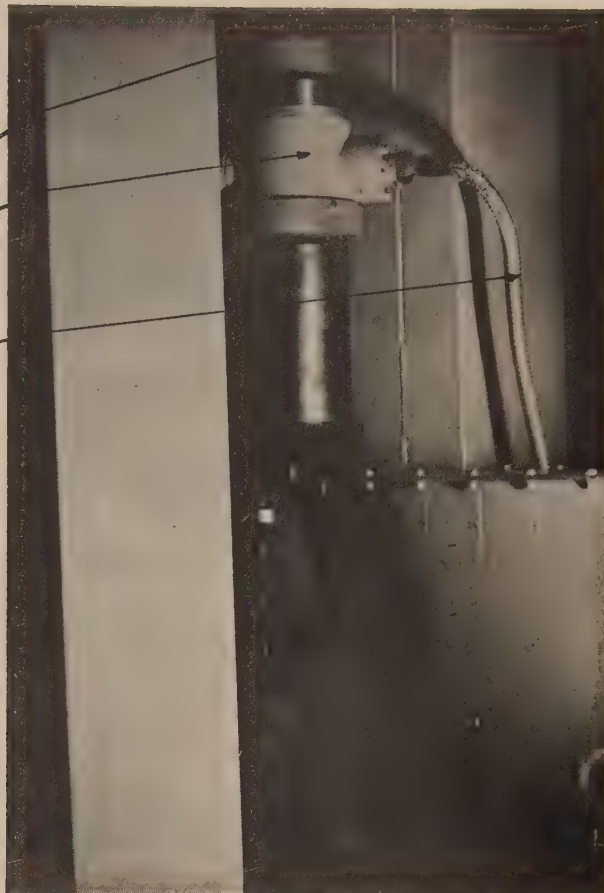


Fig. 46  
Détail du vérin et du  
peson électronique

Peson électronique en bout de vérin  
(Type PR 9226 Philips)

Appareil de mise sous pression AMSLER PM 103

Indicateur de force relié au peson

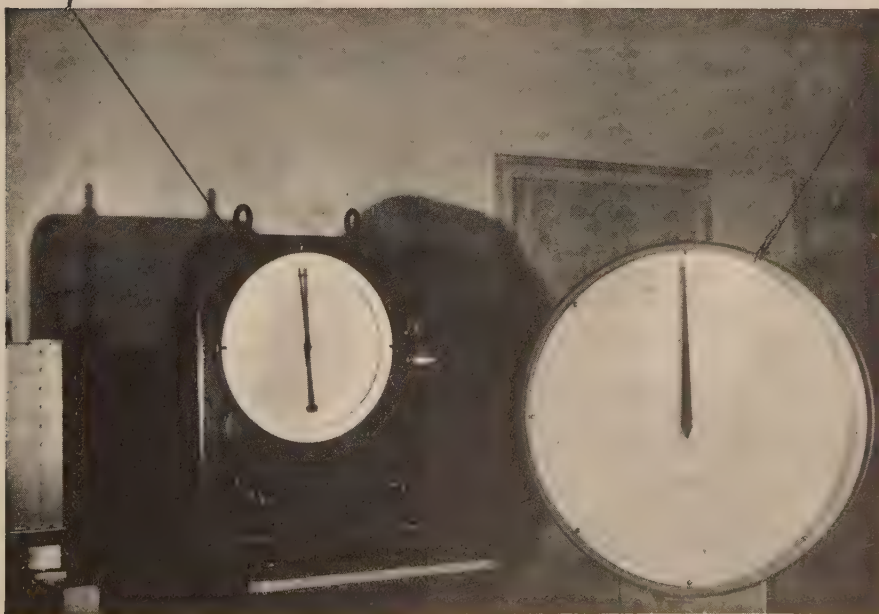


Fig.47 - Dynamomètre AMSLER et indicateur de force PHILIPS

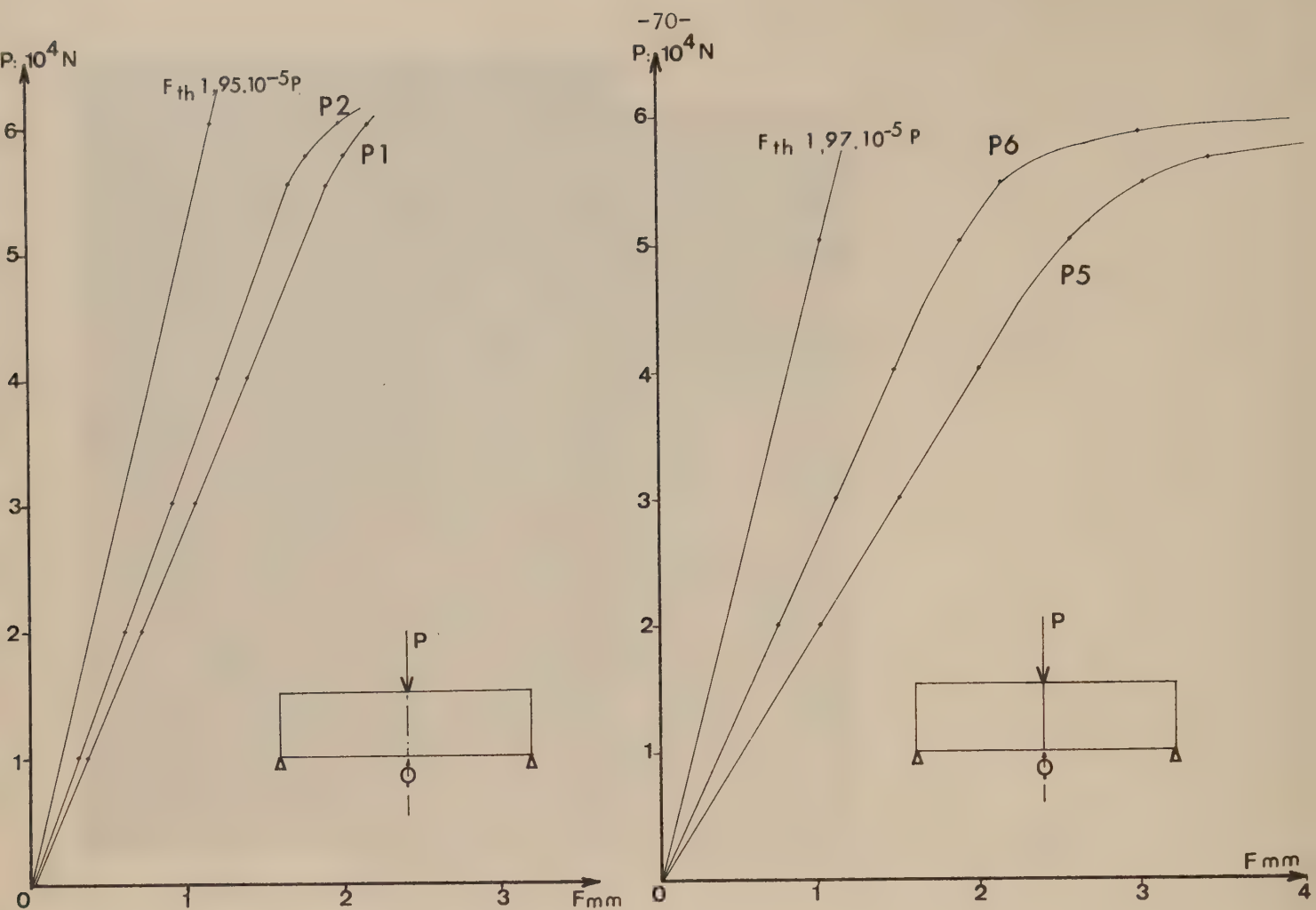
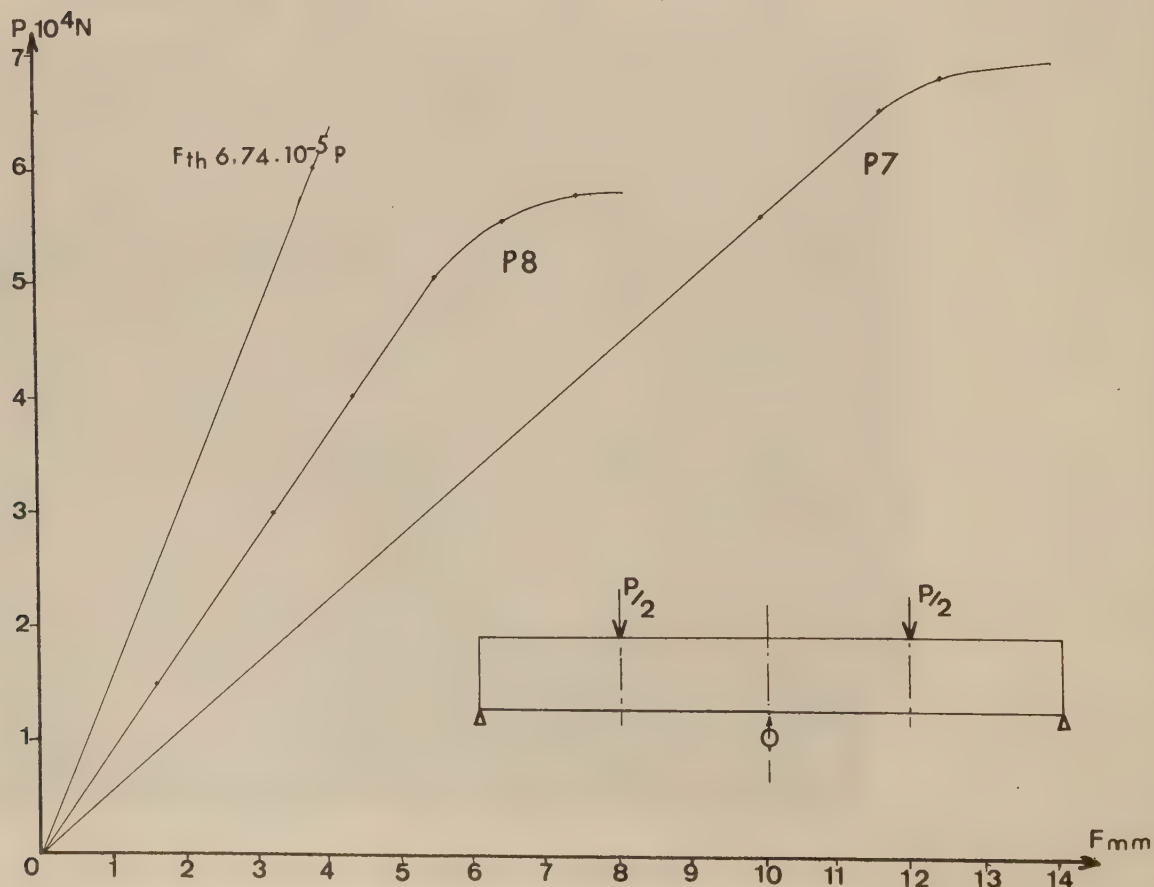


FIG 48

FLECHES VERTICALES - POUTRES : 1, 2, 5, 6, 7, 8



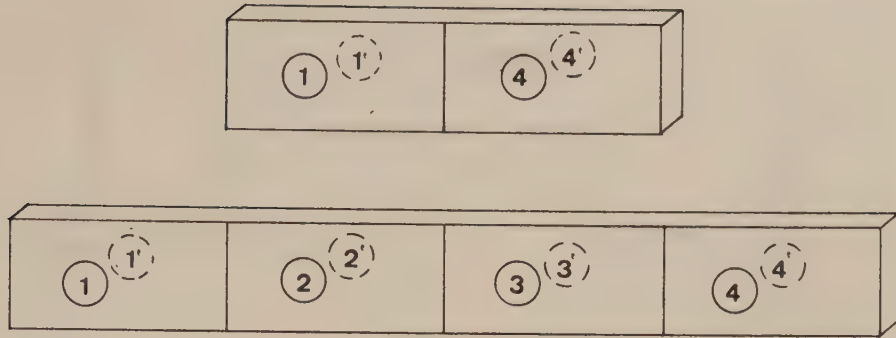


FIG : 49

4.4.2.1. Panneaux de poutre soumis essentiellement à l'effort tranchant

Ce sera le cas des panneaux référencés sur la Fig. 49 par les numéros 1, 4, 1', 4', sous l'un ou l'autre des deux types de chargement. Les courbes des déformées pour différentes valeurs de  $P$  sont représentées Fig. 50 et 51. Elles sont caractéristiques des déformations latérales constatées lors des essais. Afin de comparaison, la Fig. 52 montre l'évolution de la flèche au centre des panneaux en fonction de la charge  $P$ . La conclusion qui semble se dégager de ces essais est la suivante : le raidisseur longitudinal, tel qu'il est conçu, ne freine pas les déformations latérales mais au contraire, il intensifie ces déformations par rapport aux déformations d'un panneau non raidi. Cette conclusion est contradictoire à celle des essais qui ont été effectués par COOPER à l'Université de Lehigh (voir réf. 22) sur des poutres munies de raidisseurs rapportés sur la poutre. Une justification peut être donnée à ce comportement en analysant le flux de cisaillement dans le raidisseur. Considérons la Fig. 53.

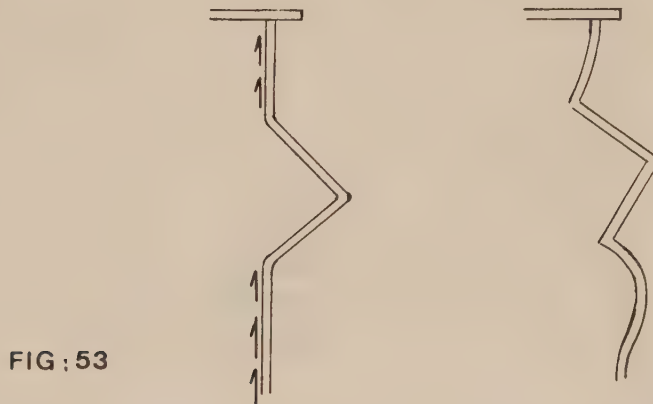


FIG : 53

Sous l'action des contraintes de cisaillement qui ne sont pas appliquées au centre de torsion du raidisseur embouti, ce dernier subit une rotation qui tend à déformer de manière sensible les sous panneaux adjacents. Il en résulte une amplification importante des déformations latérales. Cette déformation peut conduire la poutre à la ruine de manière prématurée. Une illustration de cette déformation sous l'action de l'effort tranchant est montrée sur la photo de la Fig. 54.

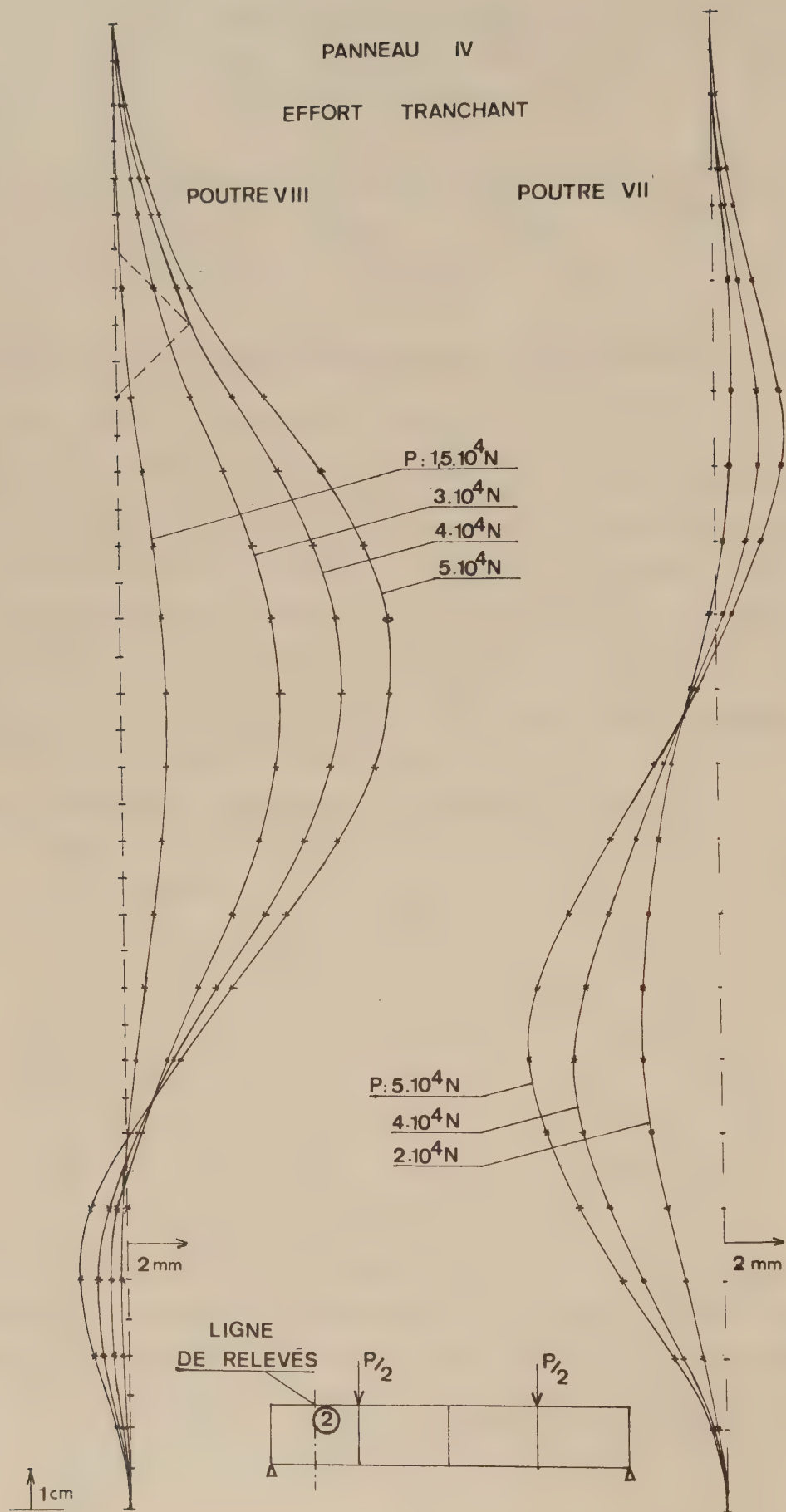


FIG: 50 - Déformées latérales

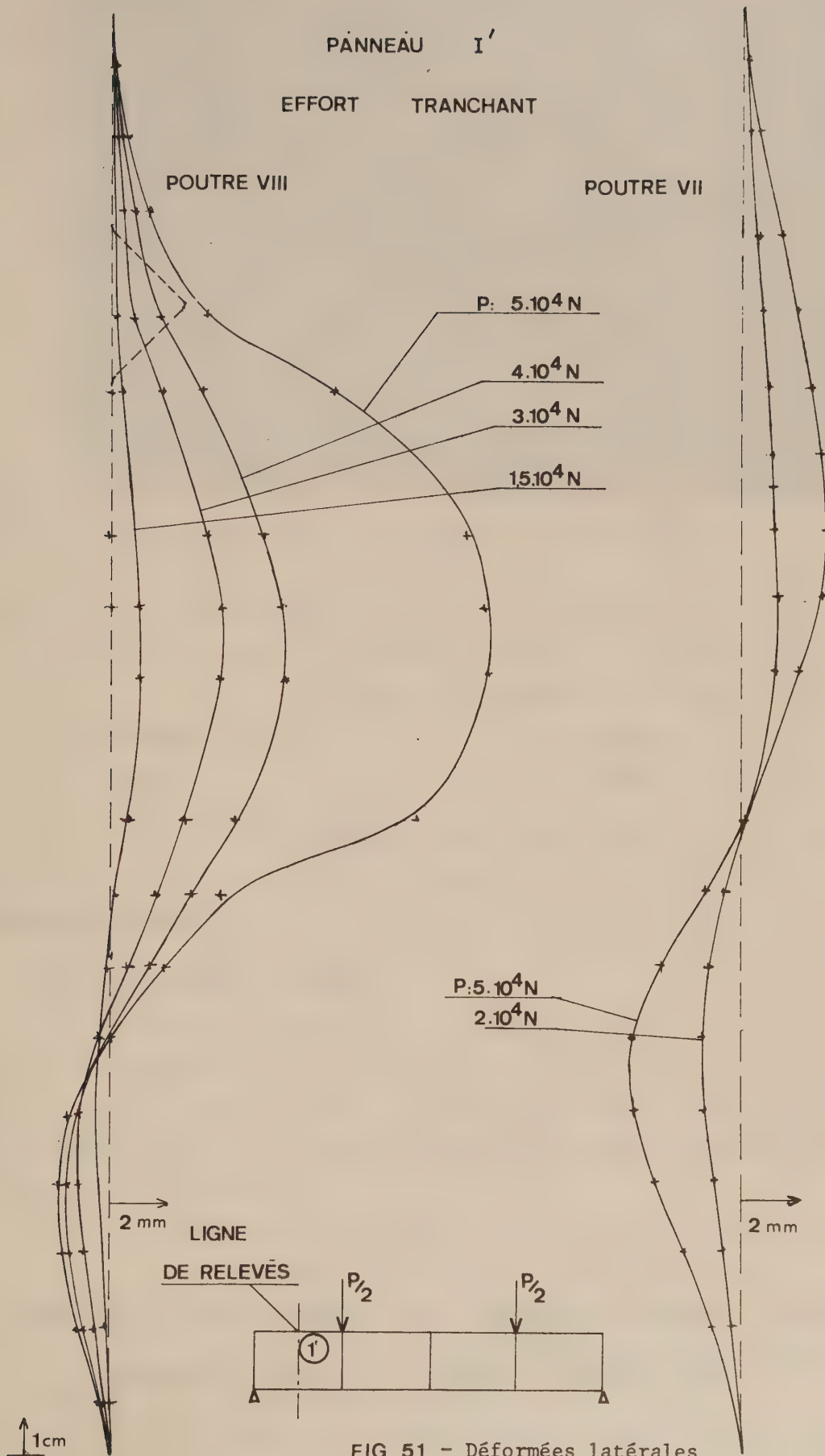


FIG 51 - Déformées latérales

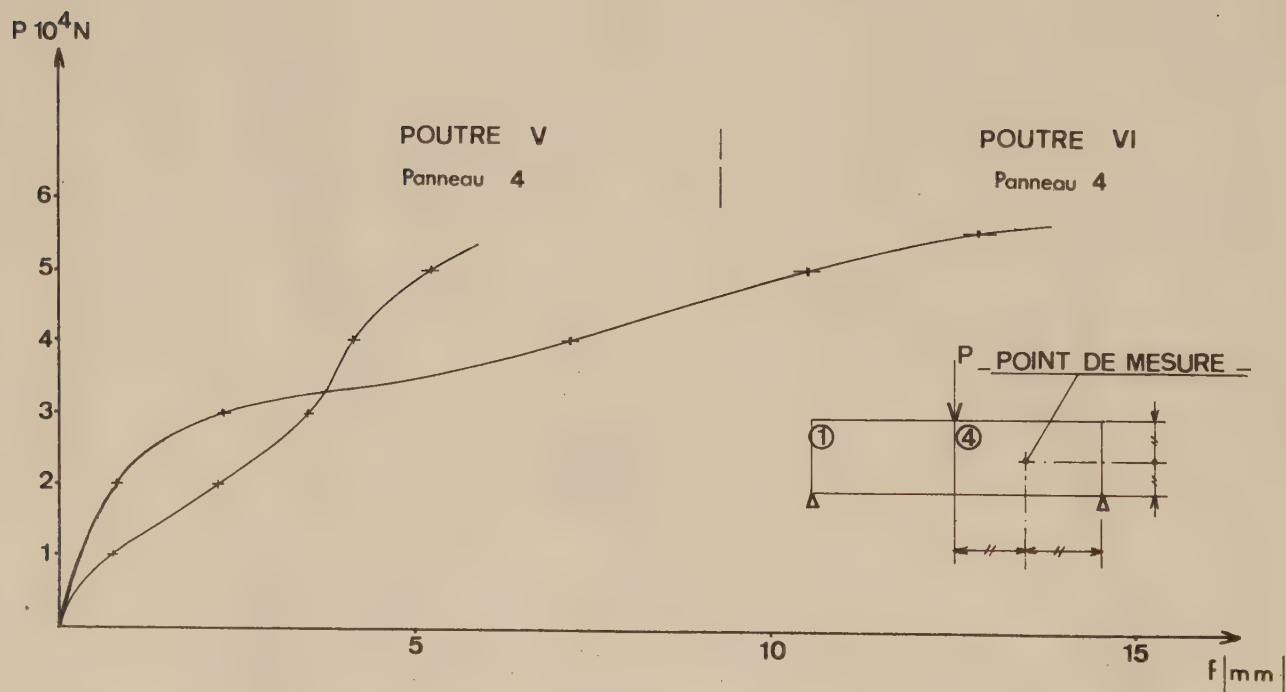
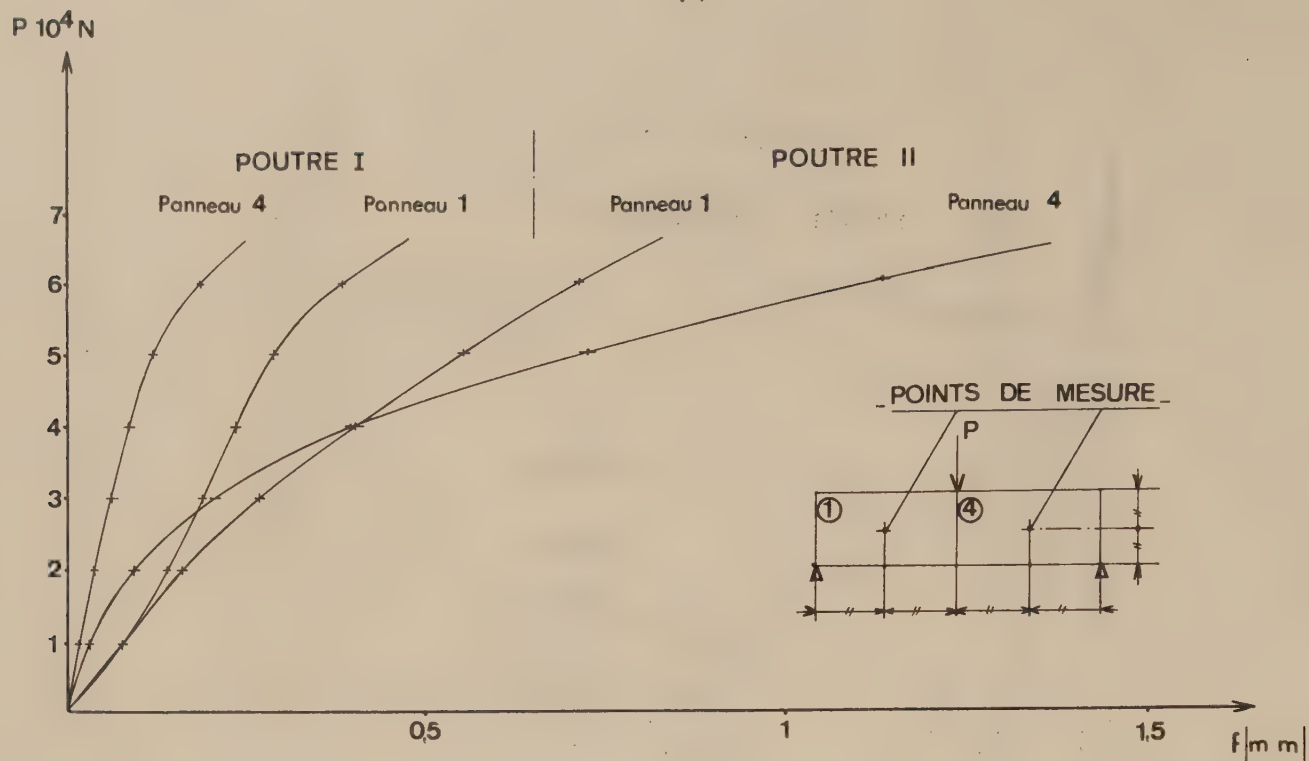


FIG : 52 FLECHES LATÉRALES EN FONCTION DE P AU CENTRE  
DES PANNEAUX SOUMIS A L'EFFORT TRANCHANT



Fig.54

#### 4.4.2.2. Panneaux de poutre soumis à la flexion pure

Ce sera le cas des panneaux 2, 3, 2', 3' des poutres 7 et 8.

Les courbes de déformées latérales pour différentes valeurs de  $P$  sont représentées Fig. 55 et 56. Les remarques essentielles déduites de l'examen de ces déformées sont :

- 1 - La présence du raidisseur freine sensiblement les déformations latérales de la plaque.
- 2 - Les déformations latérales sont plus faibles que pour les panneaux soumis à l'effort tranchant.
- 3 - Les déformations latérales dans la partie inférieure des panneaux diminuent lorsque la charge augmente du fait de la présence des tensions engendrées par le moment fléchissant, alors qu'au contraire elles s'accroissent dans la partie supérieure, du fait des contraintes de compression.

#### 4.4.3. Déformations linéiques

Nous avons, sur les poutres d'essais, sélectionné un certain nombre de points de mesure des dilatations linéiques, à l'aide de jauges électriques d'extensométrie. Le pont de mesure est un pont "BUND" DATRAN à 50 voies, muni de l'exploitation automatique avec sortie sur imprimante. Les mesures obtenues avaient essentiellement pour but de montrer :

- 1 - La non-applicabilité de la théorie des poutres aux poutres caissons à âmes à haut coefficient de finesse.
- 2 - La détermination des contraintes de traction, avec leur inclinaison sur l'horizontale, dans les panneaux soumis à l'effort tranchant.
- 3 - La répartition des contraintes dans les panneaux soumis à un moment de flexion.

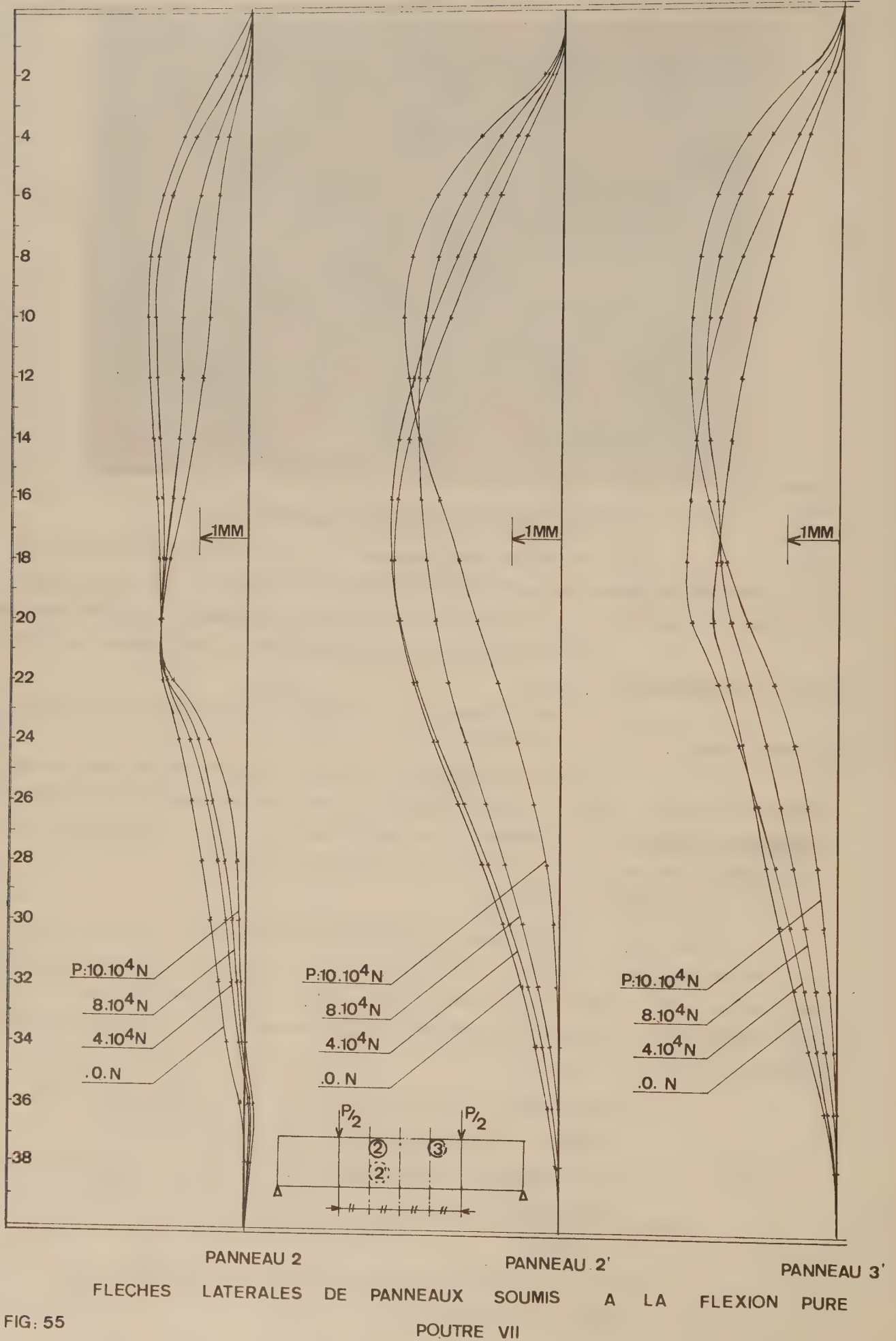
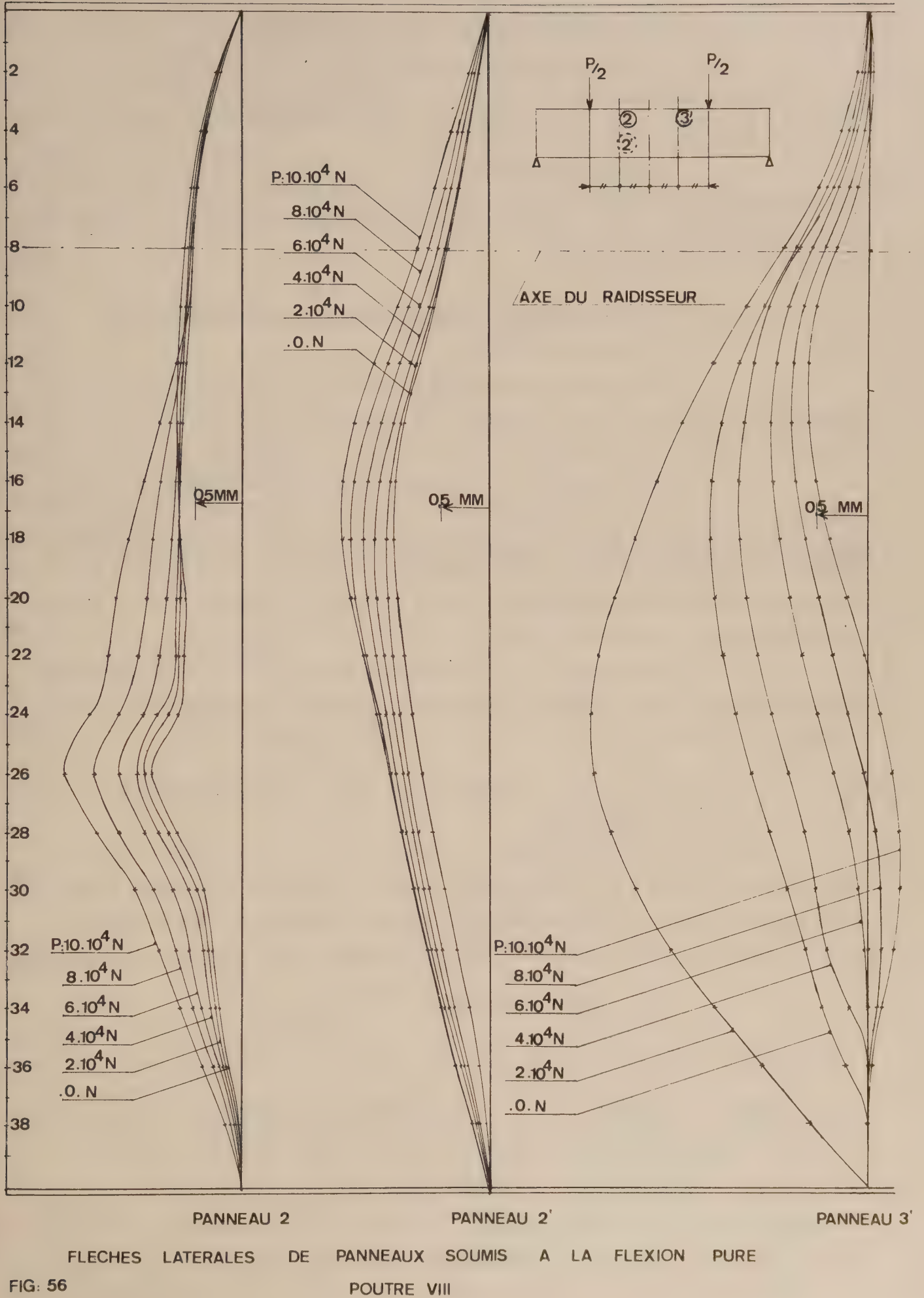


FIG: 55



#### 4.4.3.1. Non applicabilité de la théorie des poutres

La mesure des dilatations linéiques dans les semelles de la poutre suivant la direction des contraintes de flexion a permis de vérifier que la théorie des poutres n'était pas applicable aux poutres caissons (Voir Fig. 57 et 58).

On remarque toutefois sur ces courbes que les poutres possédant un raidisseur suivent de près la théorie jusqu'à une charge de l'ordre de  $3.10^4$  N. Cela confirme que les poutres munies de raidisseurs obéissent mieux à la théorie des poutres que les poutres planes.

#### 4.4.3.2. Détermination des contraintes dans les panneaux soumis à l'effort tranchant

A l'aide de rosettes de 3 jauges à  $45^\circ$ , on a pu déterminer les déformations principales et par conséquent les contraintes principales en intensité et en direction dans les panneaux soumis essentiellement à l'effort tranchant.

Les résultats de ces mesures sont représentés sous forme de courbes aux Fig. 59 et 60. On remarque que la contrainte principale  $\sigma_I$  croît de manière significative sous l'action de la charge P alors que la contrainte  $\sigma_{II}$  reste faible, ce qui justifie l'hypothèse de BASLER suivant laquelle la résistance à la flexion des semelles est négligeable et que de ce fait, les tensions dans la direction perpendiculaire au champ de tension ne peuvent se développer.

On remarque que l'inclinaison de la direction de la contrainte principale majeure avec l'horizontale reste pratiquement constante pendant l'essai, l'angle  $\phi$  étant compris entre  $18$  et  $35^\circ$  suivant les panneaux étudiés.

#### 4.4.3.3. Répartition des contraintes dans les panneaux soumis à la flexion pure

Nous avons analysé cette répartition des contraintes sur les panneaux 3 des poutres 7 et 8, au moyen de jauges d'extensométrie dirigées suivant l'axe longitudinal de la poutre. Les jauges étaient disposées sur des verticales dont les positions par rapport aux extrémités du panneau sont définies sur la Fig. 61.

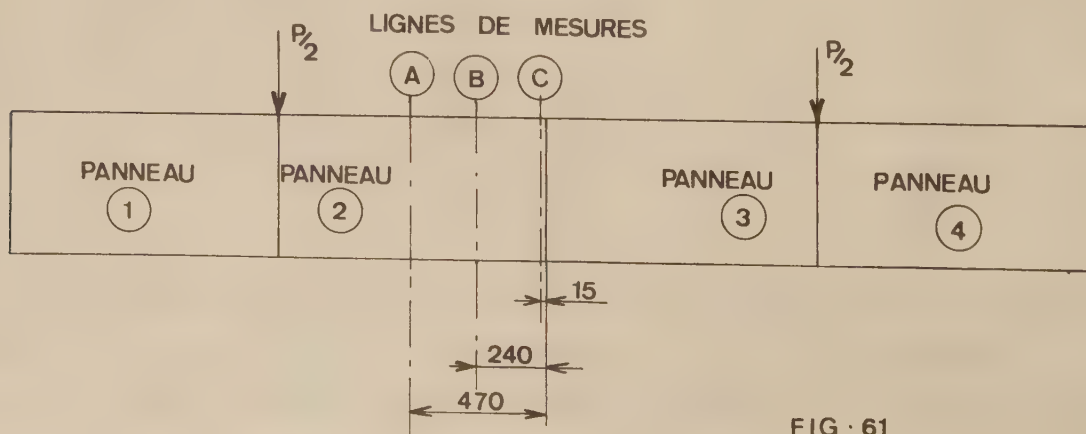
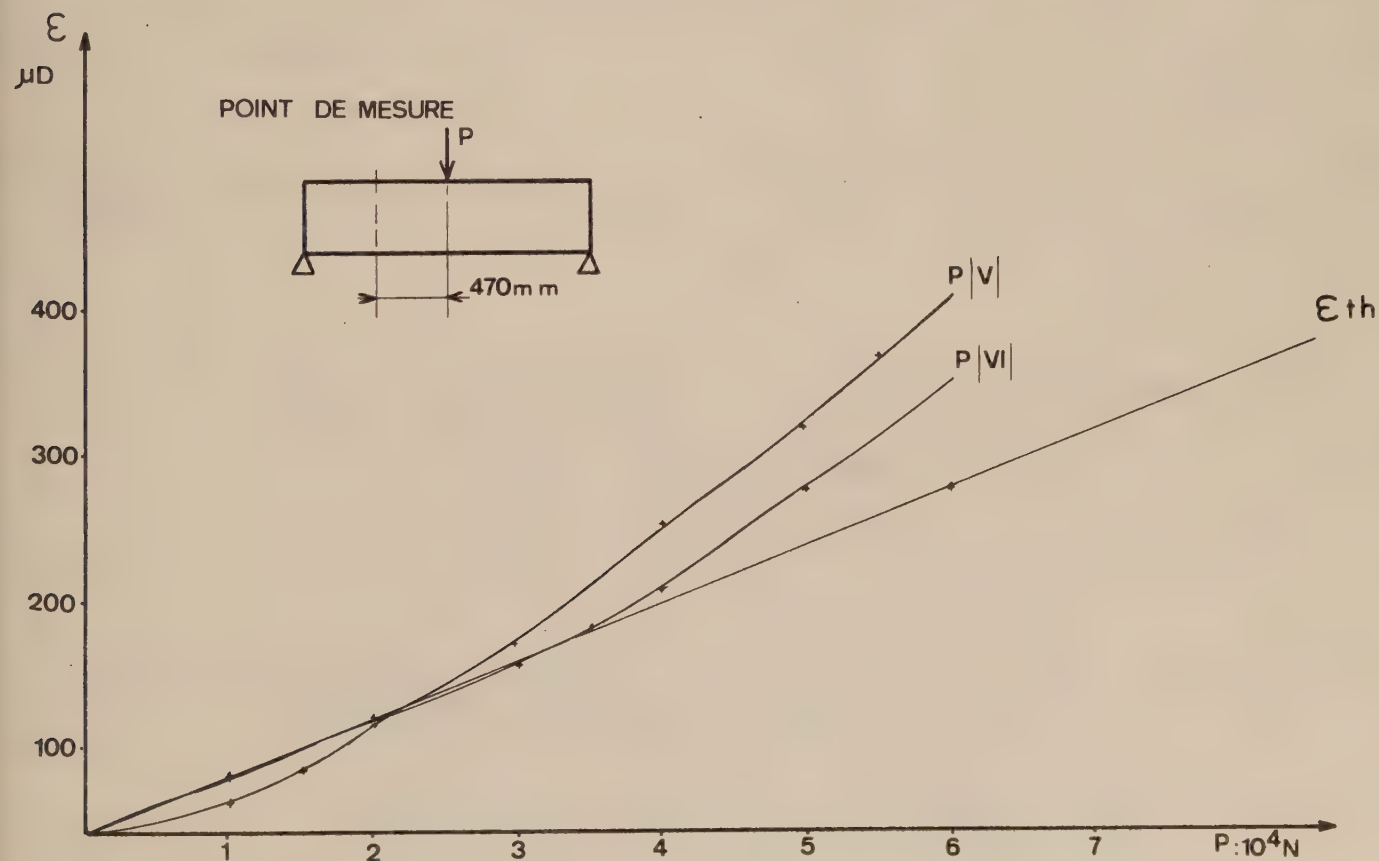
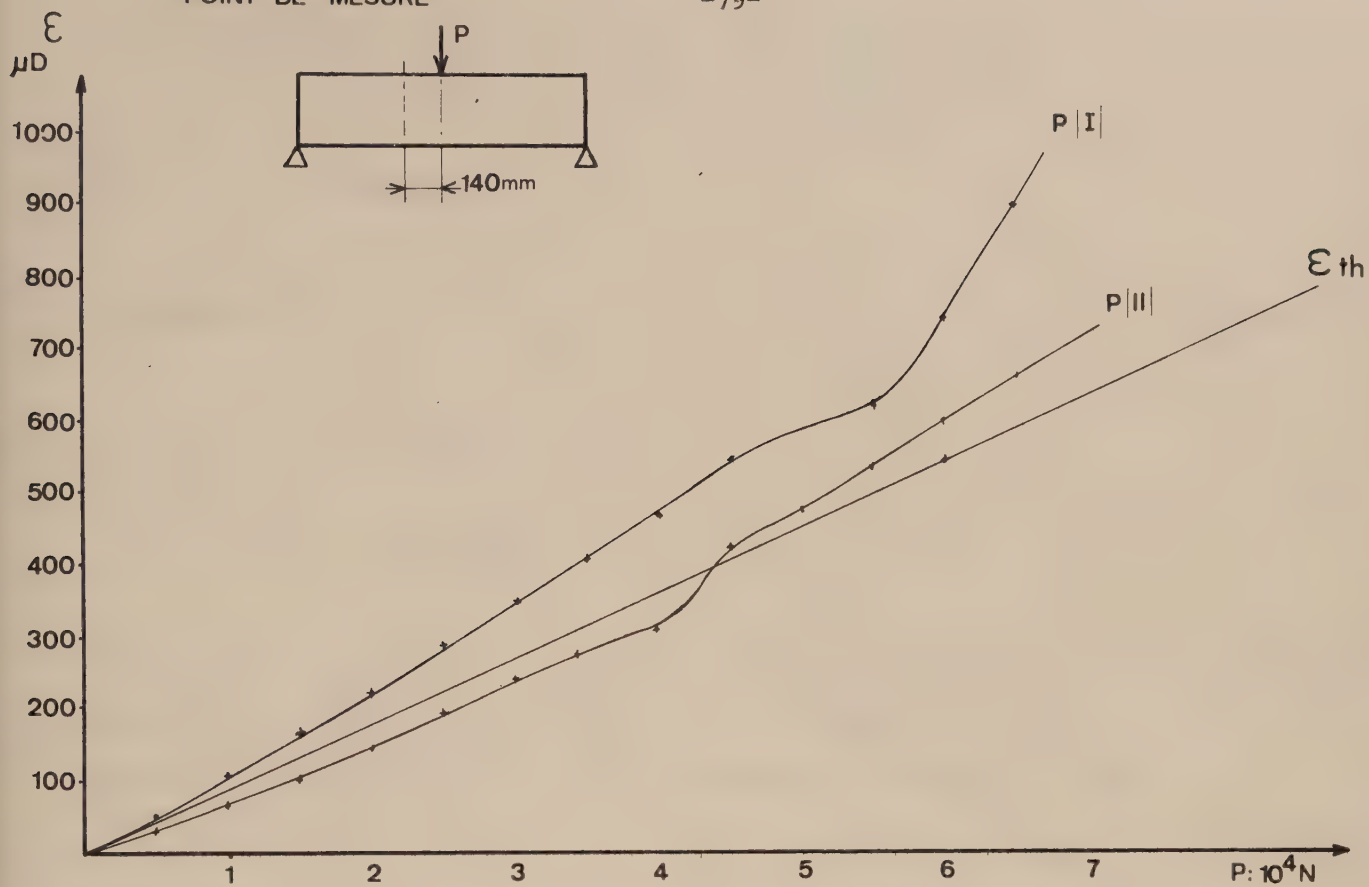


FIG : 61



EVOLUTION DE LA DILATATION LINEIQUE PRINCIPALE MAJEURE DANS LES SEMELLES

EN COMPRESSION

FIG: 57

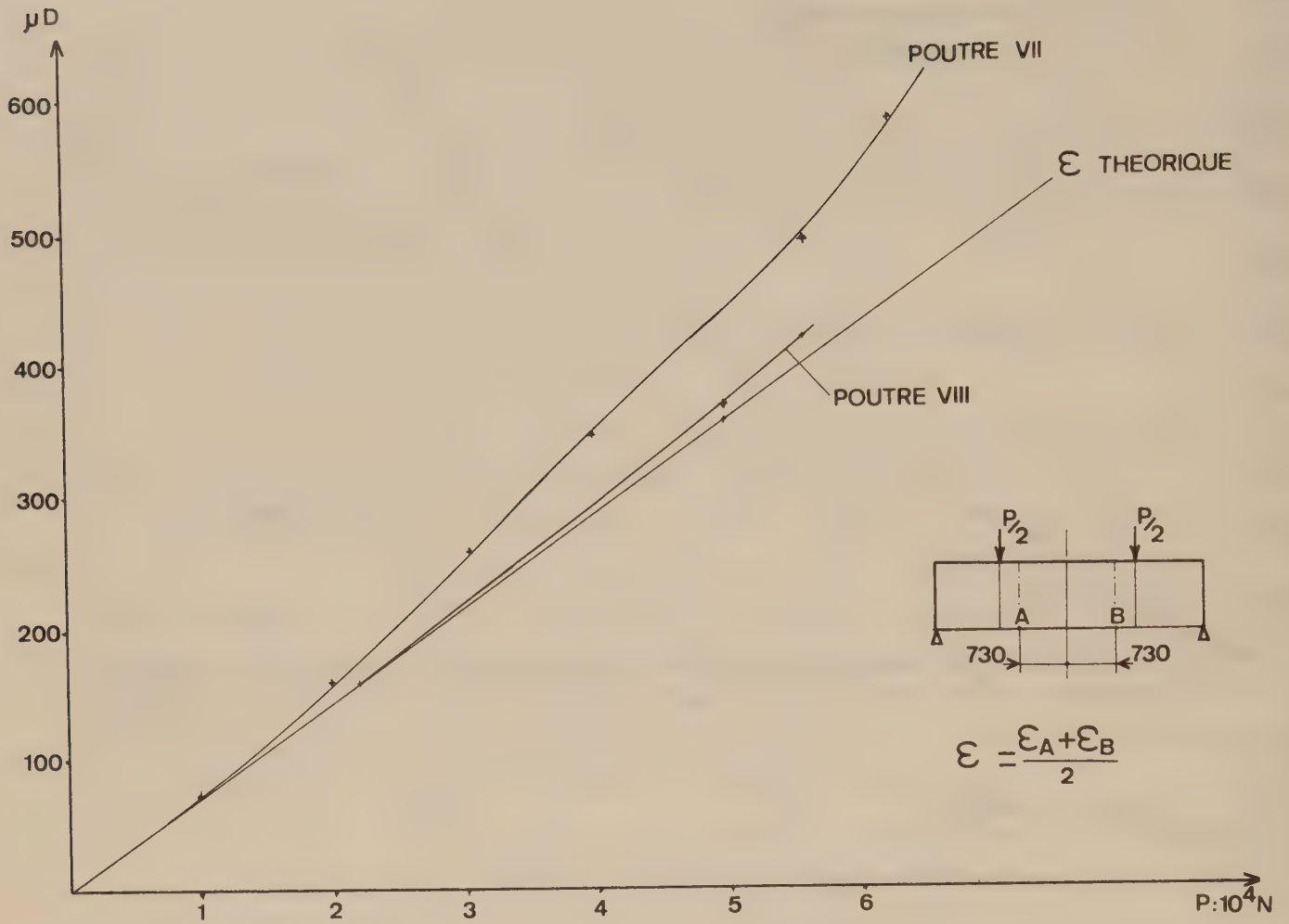


FIG: 58 EVOLUTION DE LA DILATATION LINEIQUE PRINCIPALE MAJEURE  
DANS LA SEMELLE TENDUE

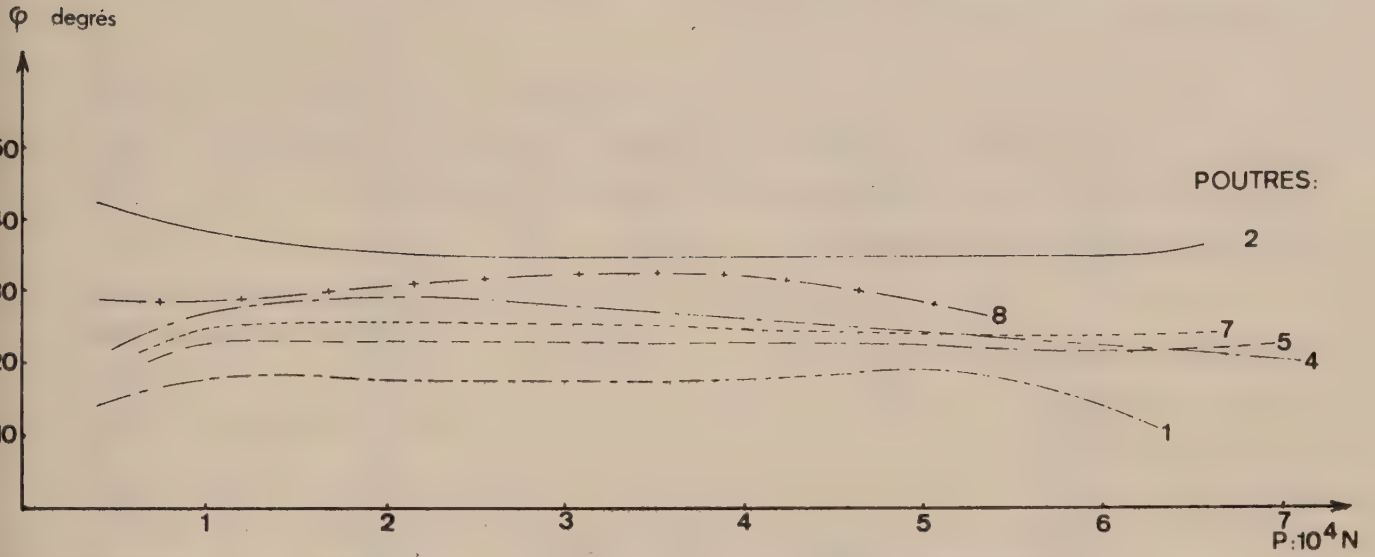
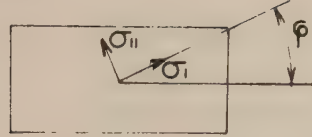


FIG: VARIATION DE L'ANGLE  $\phi$  EN FONCTION DE LA CHARGE APPLIQUEE  
59  
POUR LES PANNEAUX SOUMIS ESSENTIELLEMENT A L'EFFORT TRANCHANT

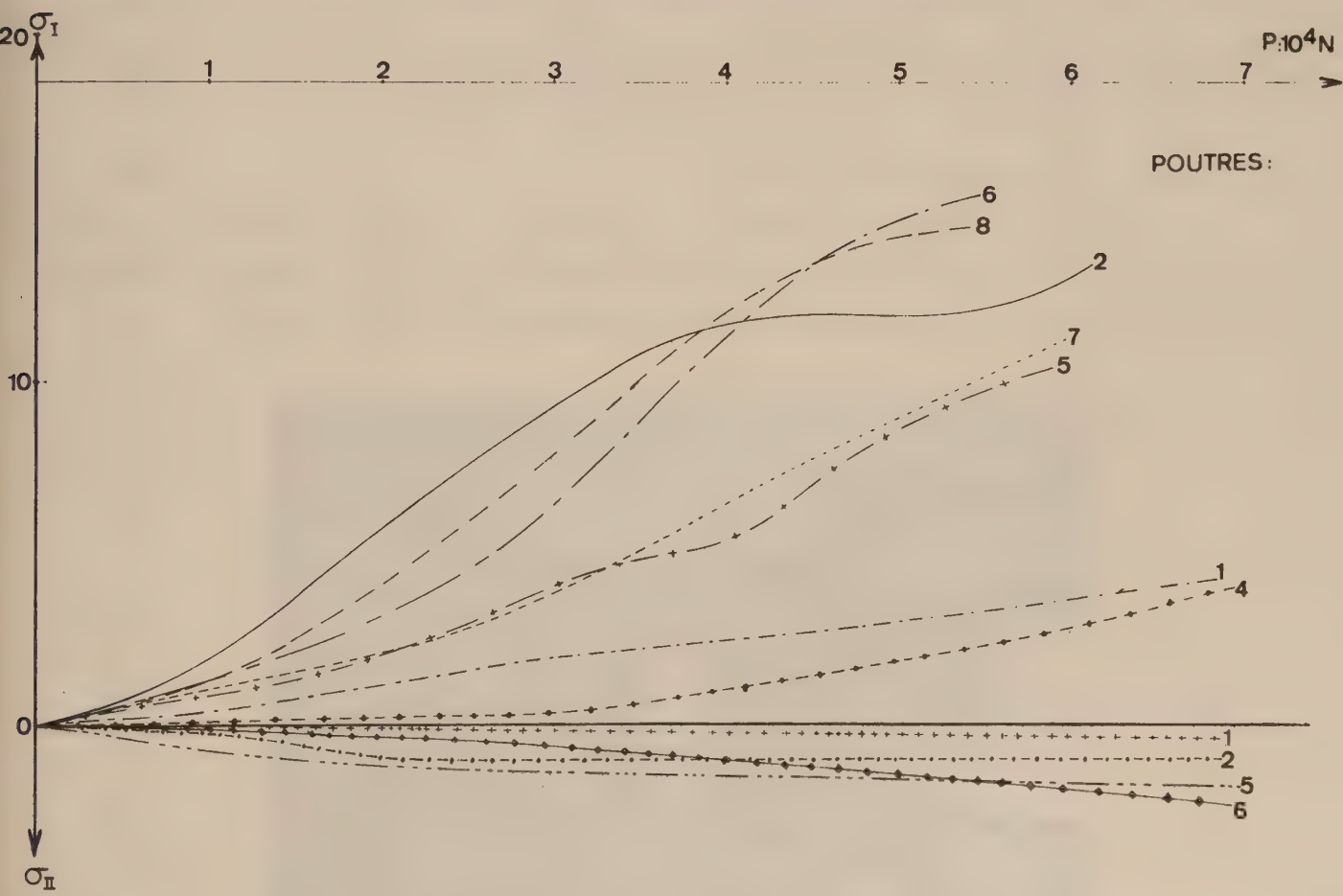


FIG: 60  
VARIATION DES CONTRAINTES PRINCIPALES  
AU CENTRE DES PANNEAUX SOUMIS A L'EFFORT TRANCHANT

Les résultats de ces mesures sont traduits sur les courbes (Fig. 62 et 63) donnant la contrainte approchée  $\sigma = E \cdot \epsilon$  en fonction de la charge  $P$ . De l'examen de ces courbes on peut déduire :

1°) pour les panneaux non raidis, il se produit un rejet des contraintes vers la semelle comprimée de la pièce, la partie de l'âme située entre l'axe neutre et la bande d'âme associée à la semelle ne participant pas à la résistance aux contraintes de compression.

2°) pour les panneaux raidis, la distribution de contraintes est linéaire. On peut noter de plus que l'axe neutre est décalé vers la partie supérieure de la poutre, ce qui amplifie les contraintes de traction. Il semble donc que la position du raidisseur au  $1/5^{\text{e}}$  supérieur de la hauteur, intéressante sur le plan théorique, (voir DUBAS Réf. 24) ne soit pas tout à fait optimale pour une structure avec un tel élanement. Un raidisseur au quart supérieur permettrait certainement un gain dans les performances de la poutre.

L'utilisation d'un raidisseur permet donc une bonne utilisation de la matière constituant l'âme. Il semble donc logique à partir de cette constatation de penser que le moment ultime que peut encaisser une poutre raidie est supérieur à celui encaissé par une poutre non raidie.

#### 4.4.4. Etude photoélastique

Nous avons essayé d'analyser le cheminement et l'intensité des contraintes au moyen de plastique photoélastique collé sur la structure et observé en lumière polarisée. Le dispositif expérimental est représenté sur la photo Fig. 64.

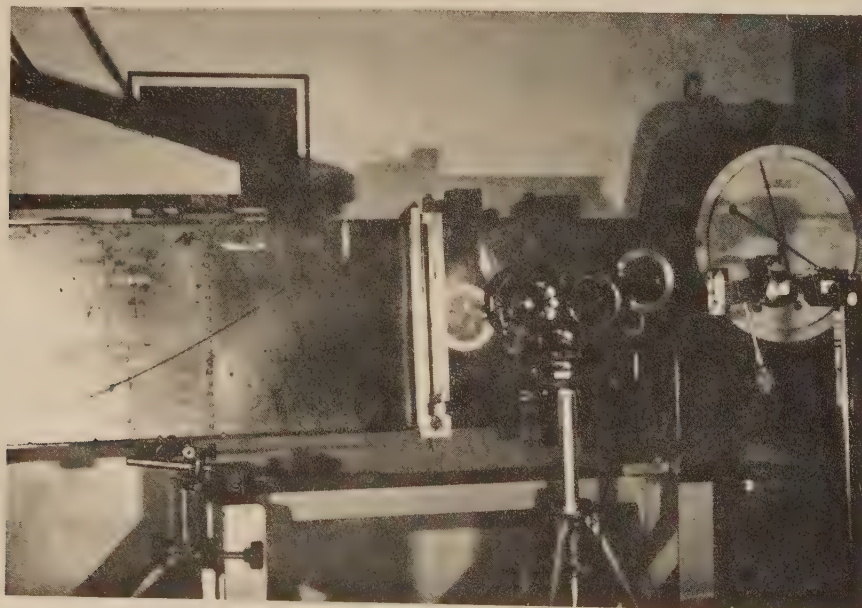


FIG: 64

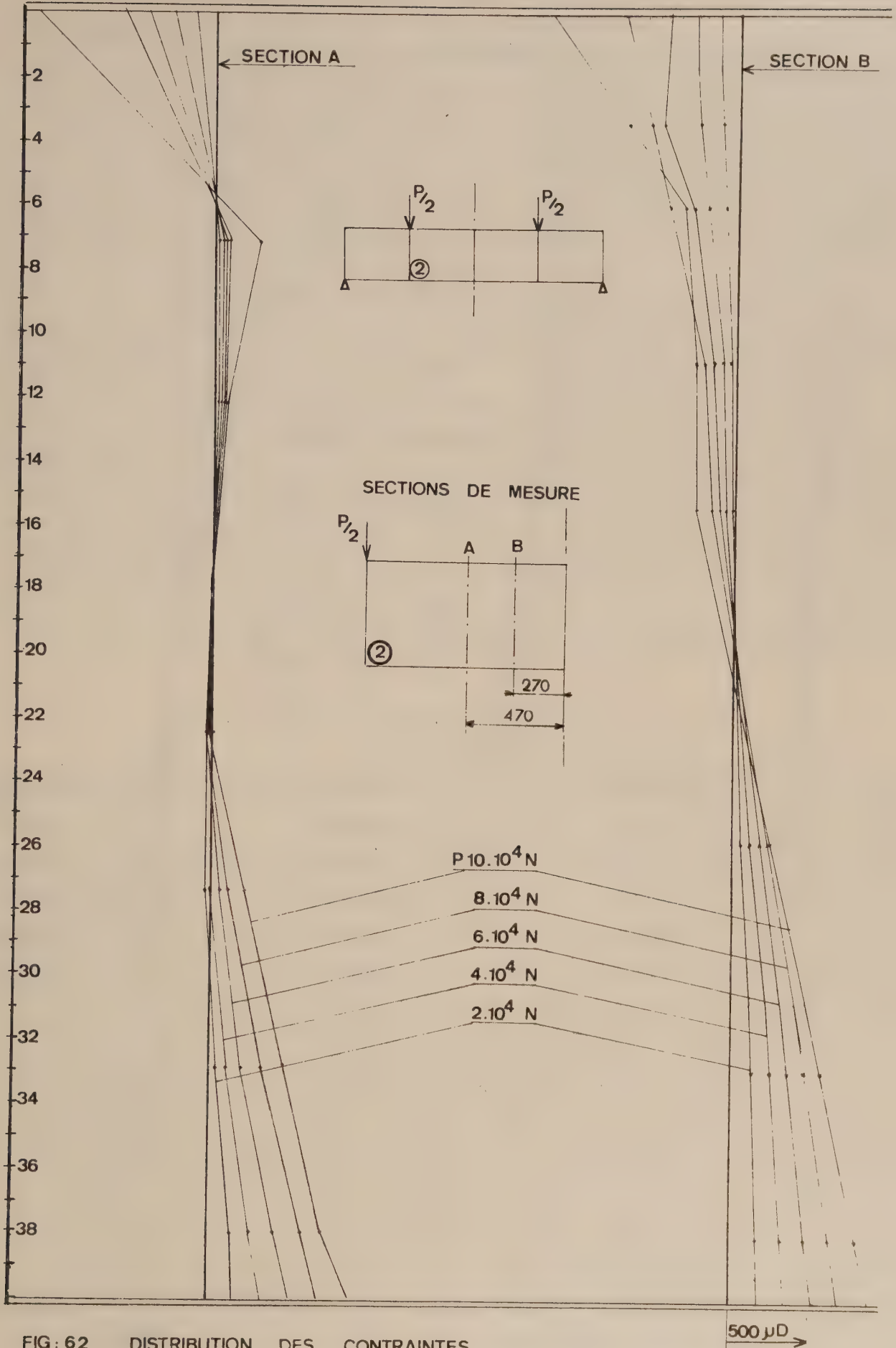


FIG: 62 DISTRIBUTION DES CONTRAINTES

SUR LE PANNEAU 2 POUTRE VII \_ FLEXION \_

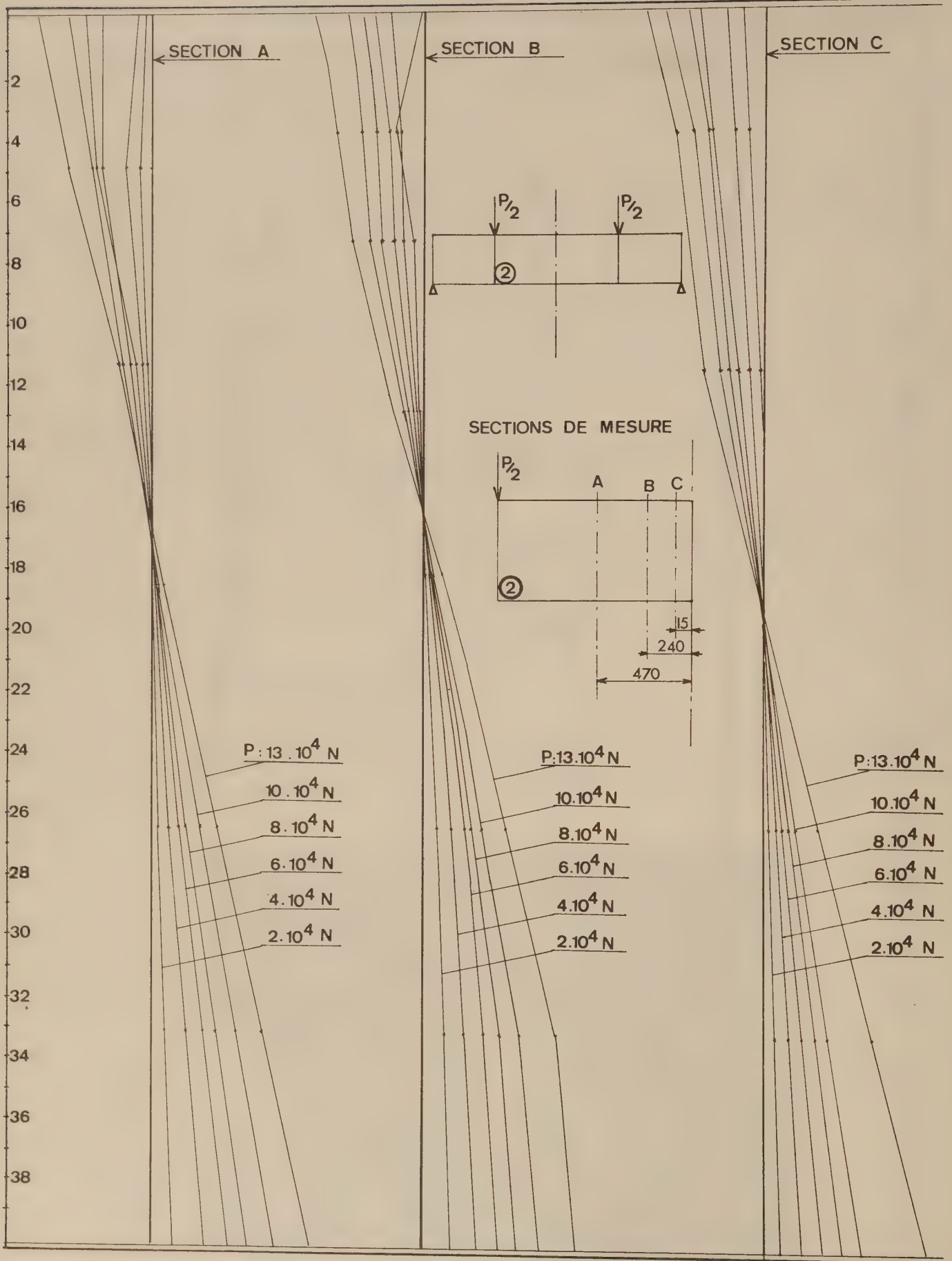


FIG: 63 DISTRIBUTION DES CONTRAINTES

SUR LE PANNEAU 2 POUTRE VIII

Dans cette étude, nous nous sommes donc attachés à la détermination des réseaux d'isochromes (lieu des points d'égale valeur du cisaillement  $2 \tau = \sigma_1 - \sigma_2$ ) et des isoclines (lieu des points où les directions principales sont parallèles (et orthogonales) à une direction donnée (celle du polariseur). Ces réseaux d'isoclines permettent de tracer les réseaux d'isostatiques ( courbes tangentes en chaque point à l'une des directions principales en ce point, formant ainsi deux réseaux orthogonaux).

Le plastique utilisé est fabriqué par la compagnie "BUDD". Nous avons utilisé suivant les cas, un plastique d'épaisseur 3 mm et de constante photoélastique  $K = 0,16^*$  ou un plastique d'épaisseur 1,2 mm de constante photoélastique  $K = 0,10$  (Ce plastique plus mince a été utilisé chaque fois que le panneau étudié a été recouvert intégralement). Bien que le module d'Young du plastique ( $E \approx 350$  hbars) soit très inférieur à celui de l'acier, la rigidité du panneau est sensiblement modifiée par le plastique collé et c'est pourquoi, nous n'accorderons à cette étude qu'une valeur essentiellement qualitative qui permet de vérifier visuellement les hypothèses émises sur le comportement des structures à coefficients de finesse élevé.

#### 4.4.4.1. Observations photoélastiques sur les panneaux soumis à l'effort tranchant

##### 4.4.4.1.1. Panneaux non raidis

Sur la plaquette de plastique photoélastique collée sur le panneau 4 de la poutre 7, nous avons observé :

1°) Que les franges colorées se développaient à partir de la diagonale du panneau. (Voir Fig. 65) La frange 1 (passage du rouge au bleu apparaît pour une force P de 2100 daN, la frange 2 vers 4200 daN, la frange 3 pour 6200 daN environ. Nous avons par ailleurs montré à l'aide de jauges d'extensométrie que la contrainte dans la direction perpendiculaire au champ de tension était faible. L'augmentation du nombre de franges qui correspond à l'augmentation de la quantité  $\sigma_1 - \sigma_2$  avec  $\sigma_2$  faible traduit donc l'accroissement de la contrainte  $\sigma_1$  sous l'action de l'effort P appliqué. En respectant l'échelle des photos de la Fig. 65 les distributions de contraintes pour 4 cas de charge sont représentés Fig. 66. Cette répartition de contraintes indique clairement que la ruine de la poutre se produit lorsqu'apparaît une charnière plastique correspondant à  $\sigma_1 = \sigma_e$

$$(*) K = \frac{C E_p}{1 + \nu_p} \quad \text{avec } E_p \text{ module d'Young du plastique, } \nu_p \text{ coefficient de Poisson du}$$

plastique ; C constante photoélastique du plastique.

2°) Le tracé des isostatiques à partir des isoclines relevées sur la structure (voir Fig. 67) montre que le champ de tension apparaît pour une charge de 1000daN environ et que l'inclinaison de ce champ de tension reste constante jusqu'à la charge ultime. Le champ de tension peut donc être défini parfaitement puisque son inclinaison est déterminée et que la répartition des contraintes est connue.

#### 4.4.4.1.2. Panneaux raidis

Un panneau soumis à l'effort tranchant a été entièrement recouvert de "Photostress" ce qui a permis de déterminer le cheminement des contraintes sur tout le panneau (voir les isostatiques sur la Fig. 68). Les photos des isochromes (voir Fig. 69) permettent de plus de montrer les zones les plus sollicitées du panneau. On peut déduire de l'examen des isostatiques et des isochromes la conclusion suivante : Il se développe dans les deux sous panneaux des champs de traction indépendants, le sous panneau inférieur développant des tensions plus élevées que celles du panneau supérieur. (voir photo correspondant au cas de charge 5000 daN de la Fig. 69). La Fig. 70 illustre la représentation des contraintes de traction dans un panneau raidi, soumis à l'effort tranchant à partir du cheminement des contraintes représenté sur la Fig. 68 et des isochromes de la Fig. 69 pour le cas de charge  $P = 5000$  daN.

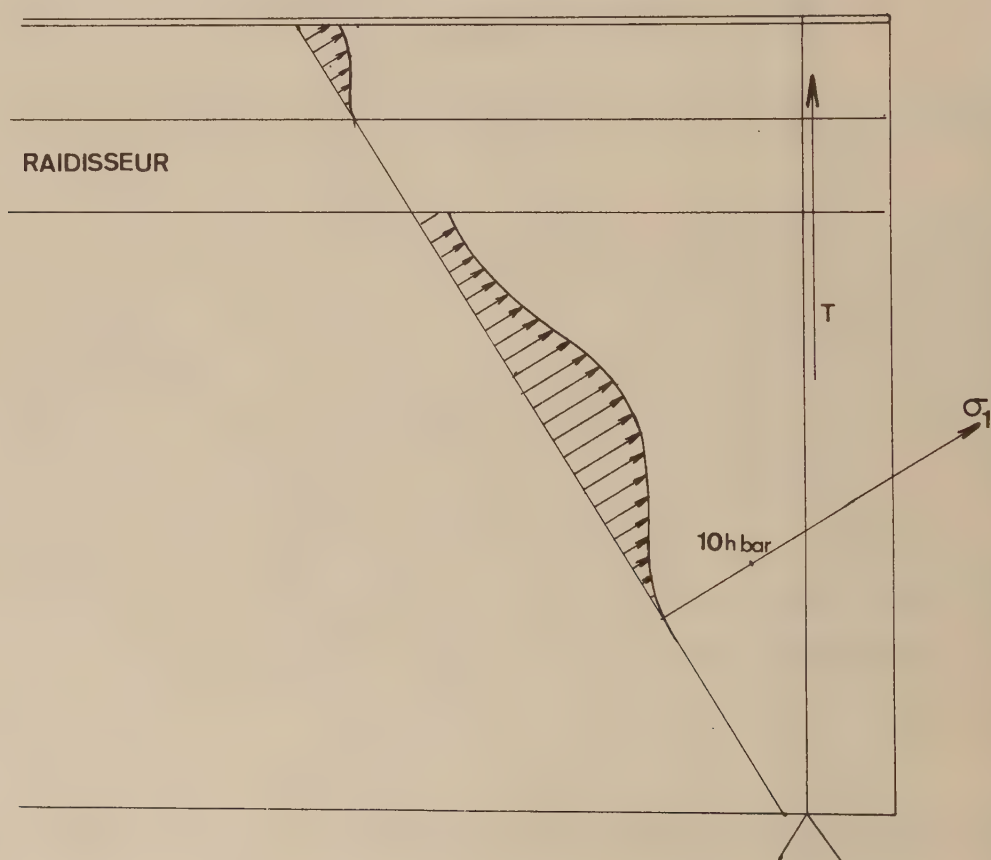


Fig. 70 - Répartition des contraintes dans un panneau raidi  
soumis à l'effort tranchant (Panneau 4 Poutre 7 -  $P = 5000$  daN)

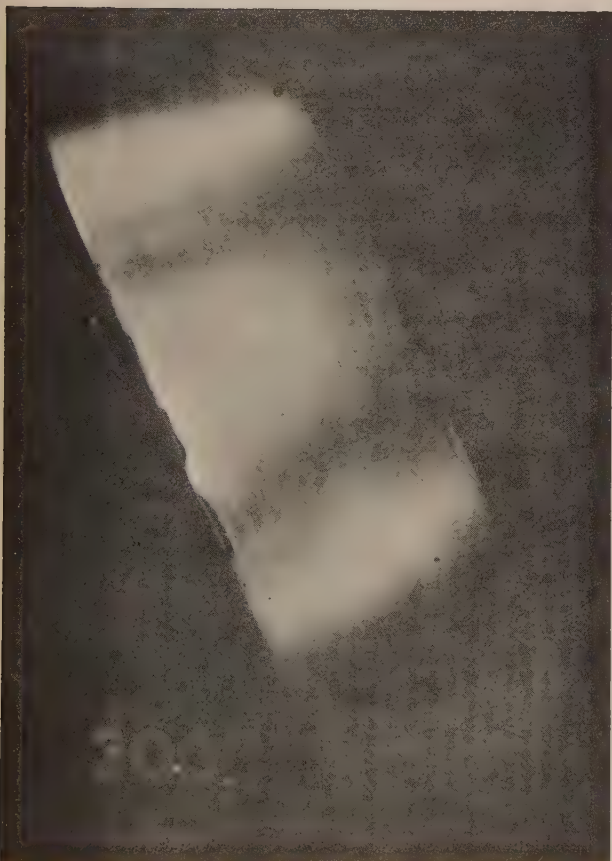
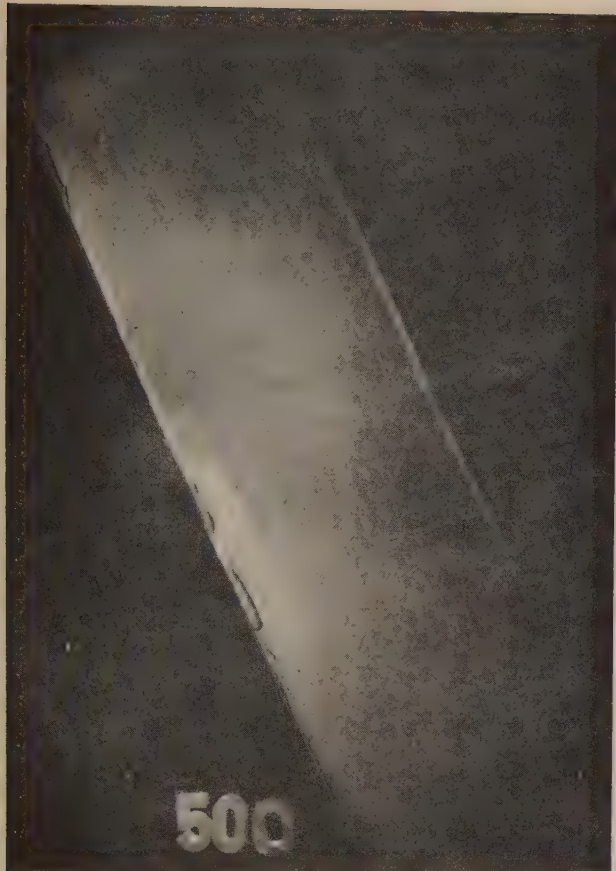


Fig.65 - Photographies des isochromes-Poutre 7-Panneau 4 - Effort tranchant

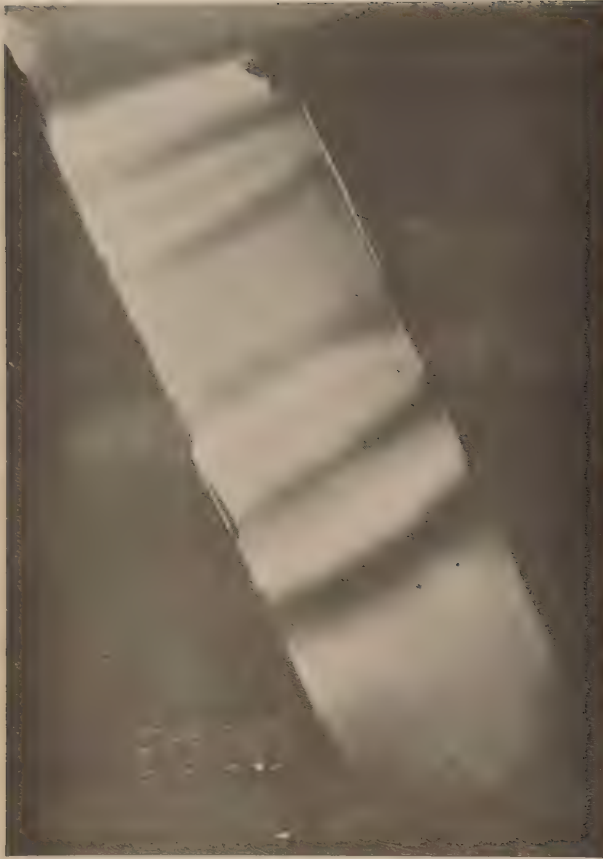


Fig.65 - Photographies des isochromes-Poutre7-Panneau4 - Effort tranchant (suite)

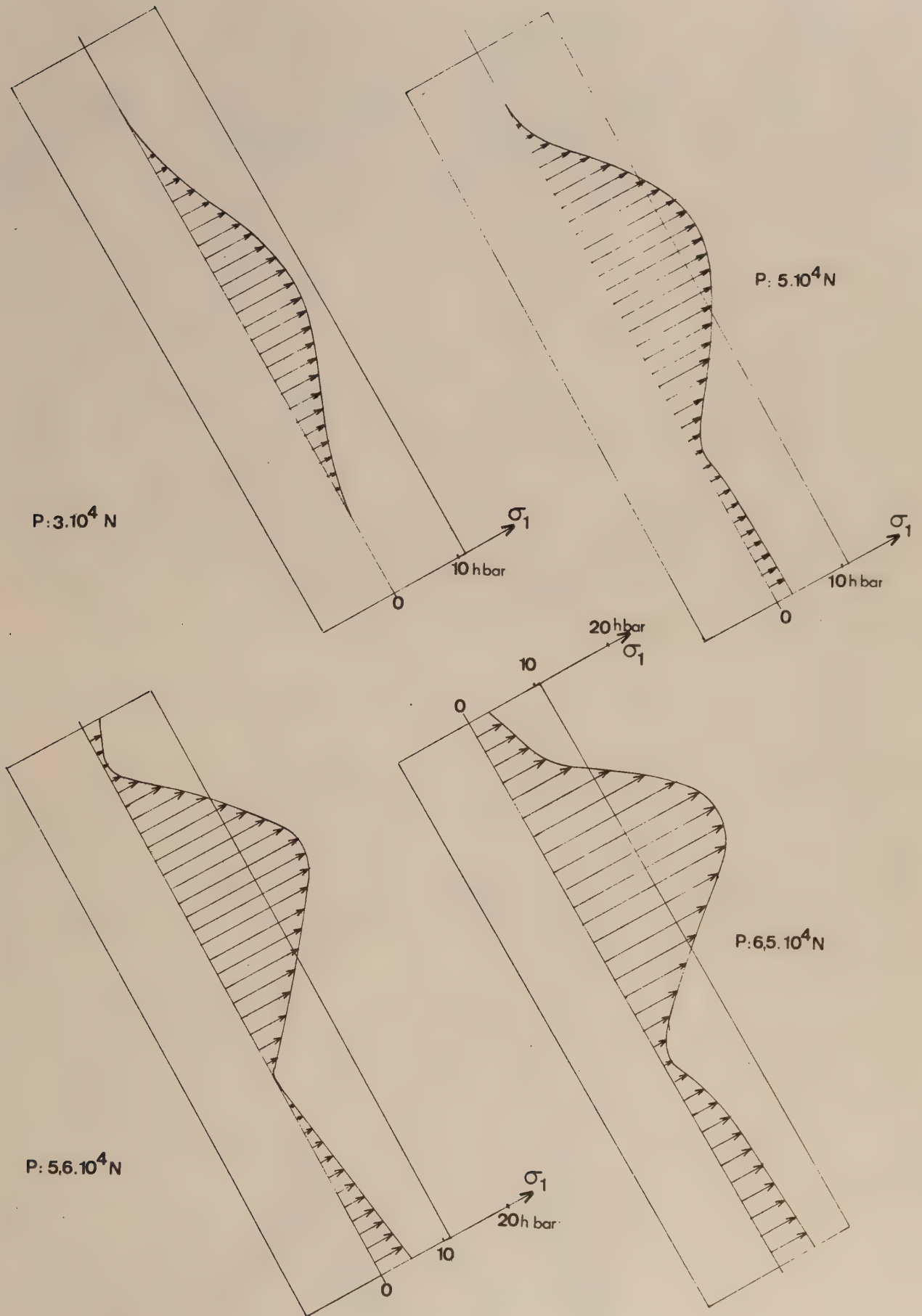


FIG 66 REPARTITION DES CONTRAINTES DE TRACTION DANS UN PANNEAU SOUMIS A L'EFFORT TRANCHANT

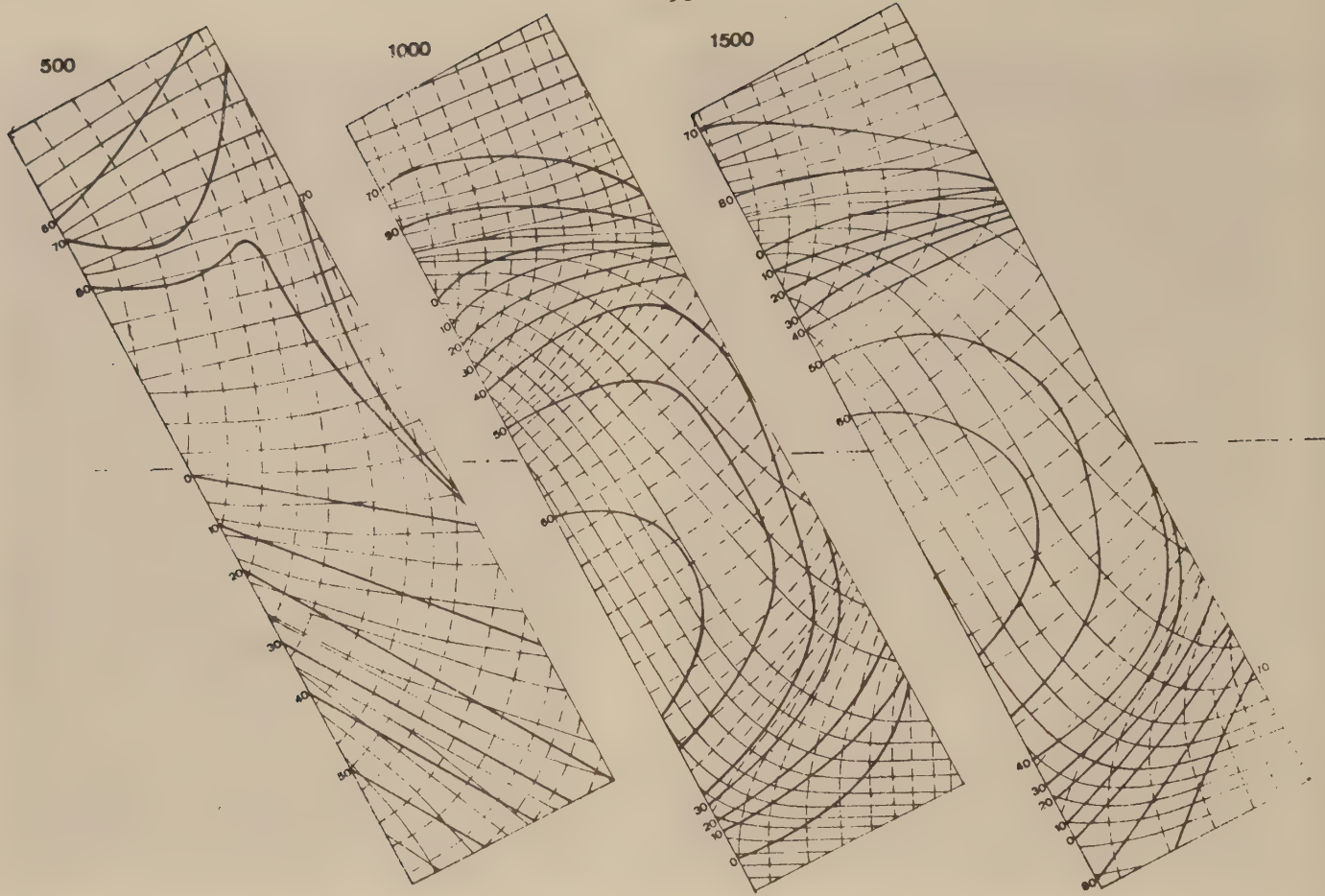
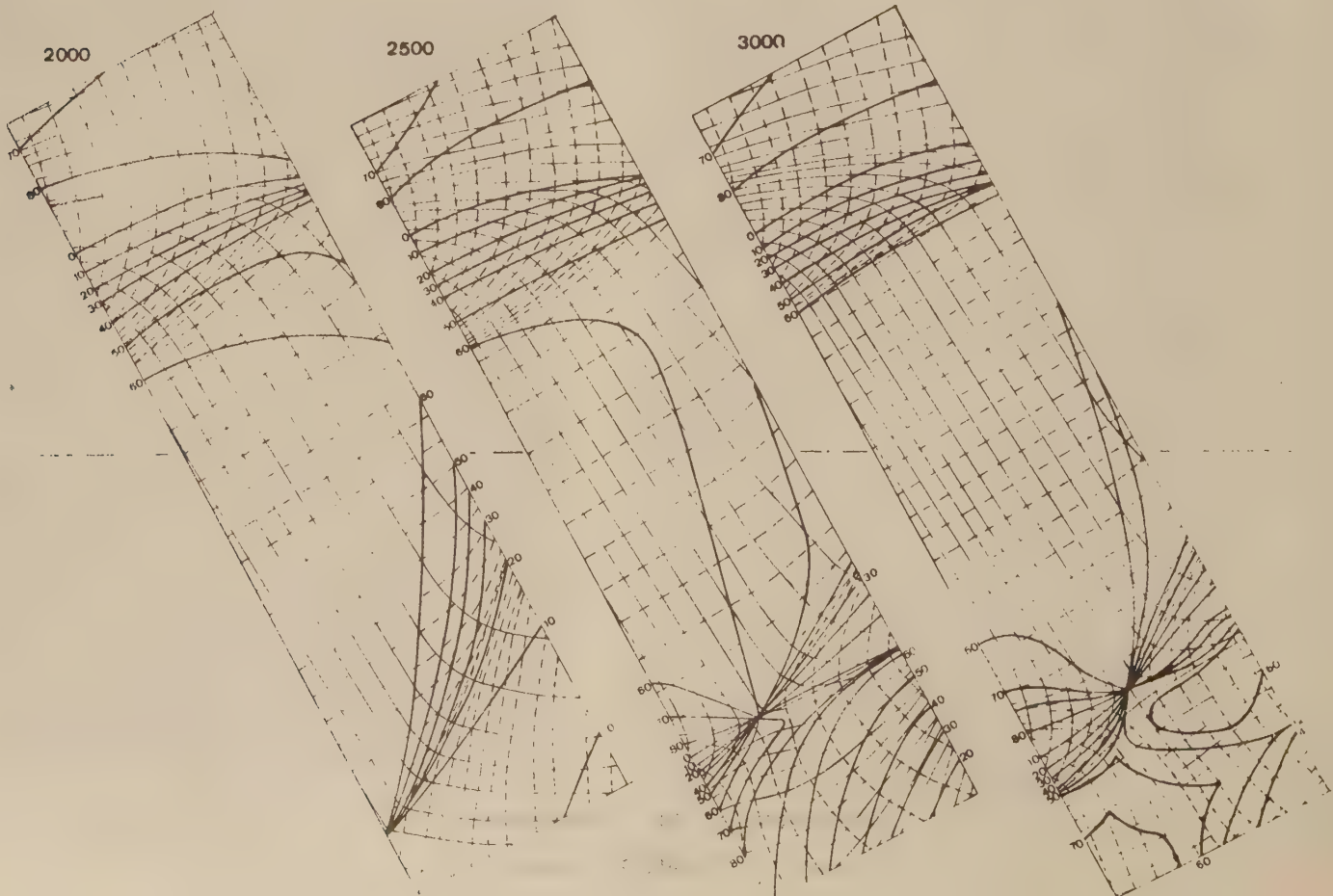


Fig - 67 ÉVOLUTION DU CHAMP DE CONTRAINTES SUR UN PANNEAU SANS RAIDISSEUR SOUMIS A L'EFFORT TRANCHANT  
( PANNEAU 4 - POUTRE 7 )



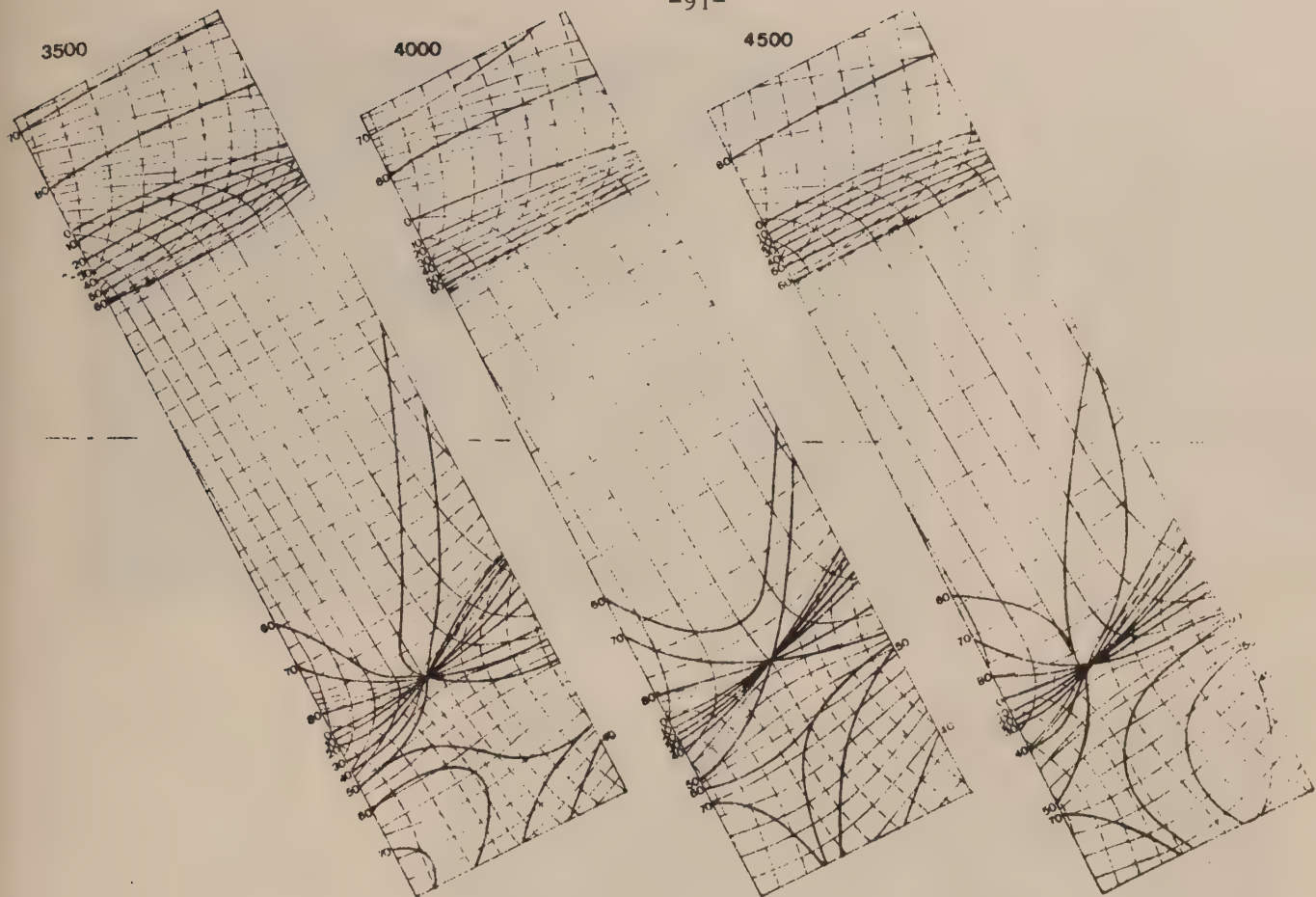
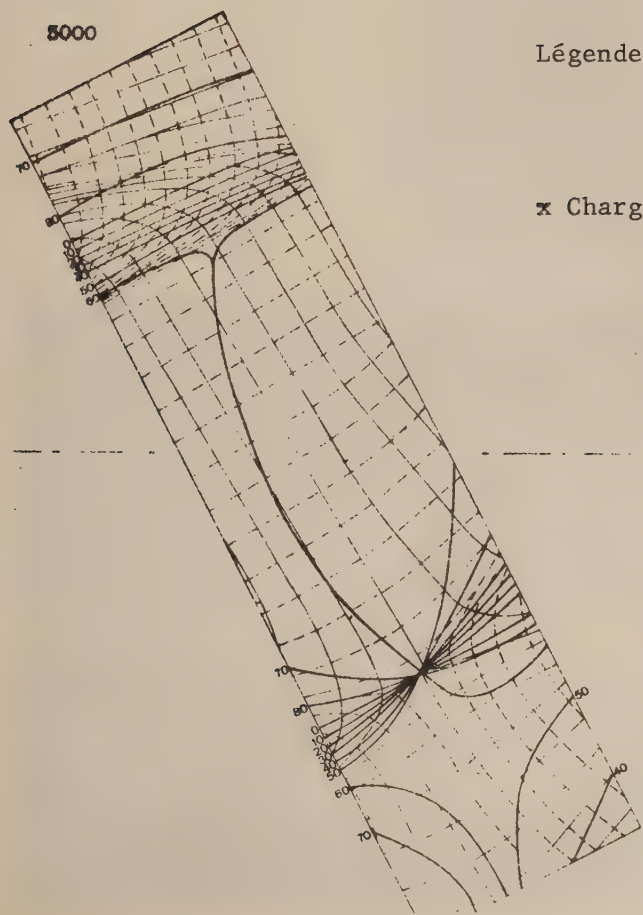


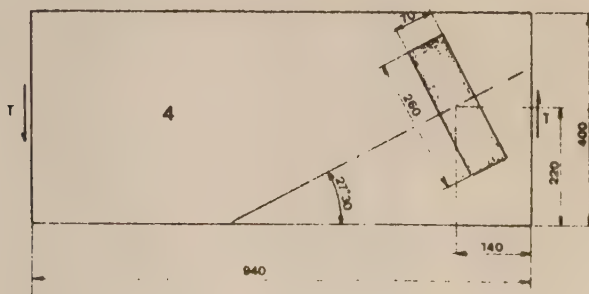
Fig. 67 (suite)

Légende : — isoclines  
 - - - } isostatiques

x Charges en daN



POSITIONNEMENT DU PHOTOSTRESS SUR PANNEAU 4 (POUTRE 7)



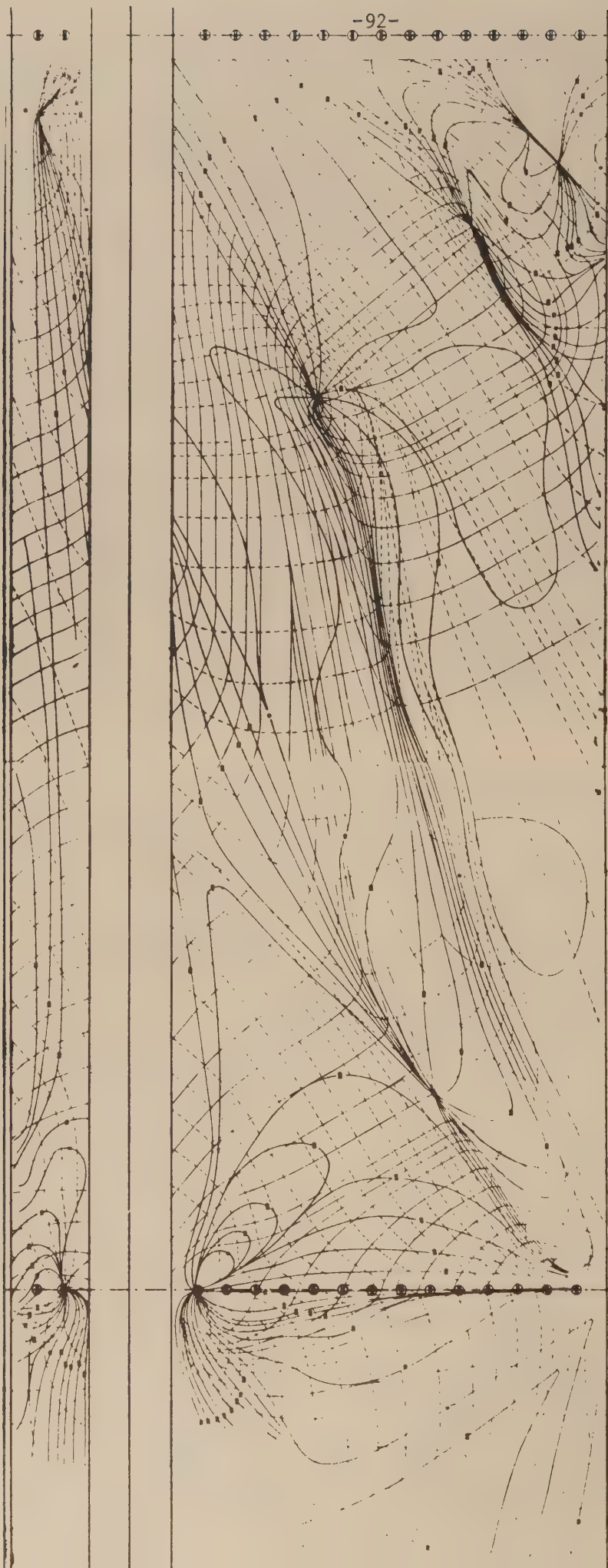


Fig. 68 - Tracé des isostatiques sur panneau 4 Poutre 8 (effort tranchant)

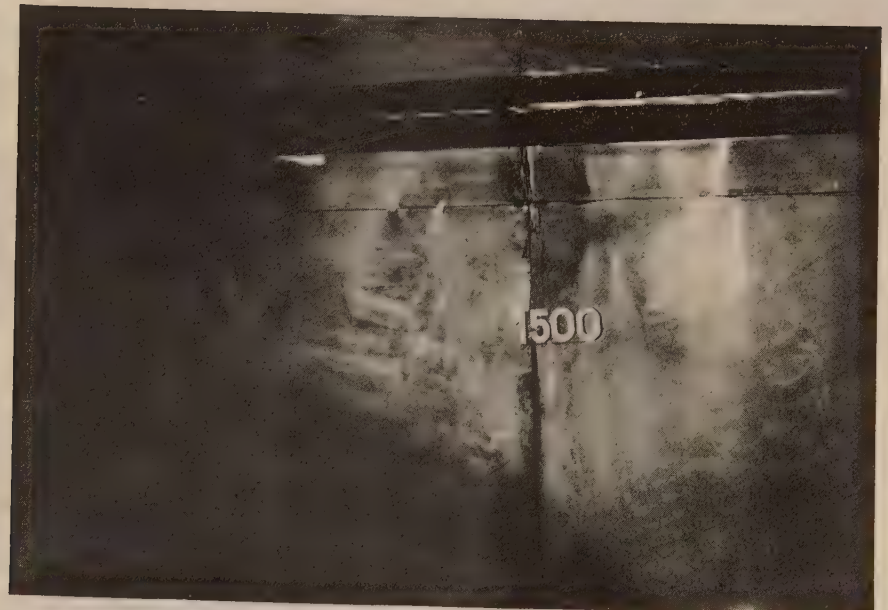
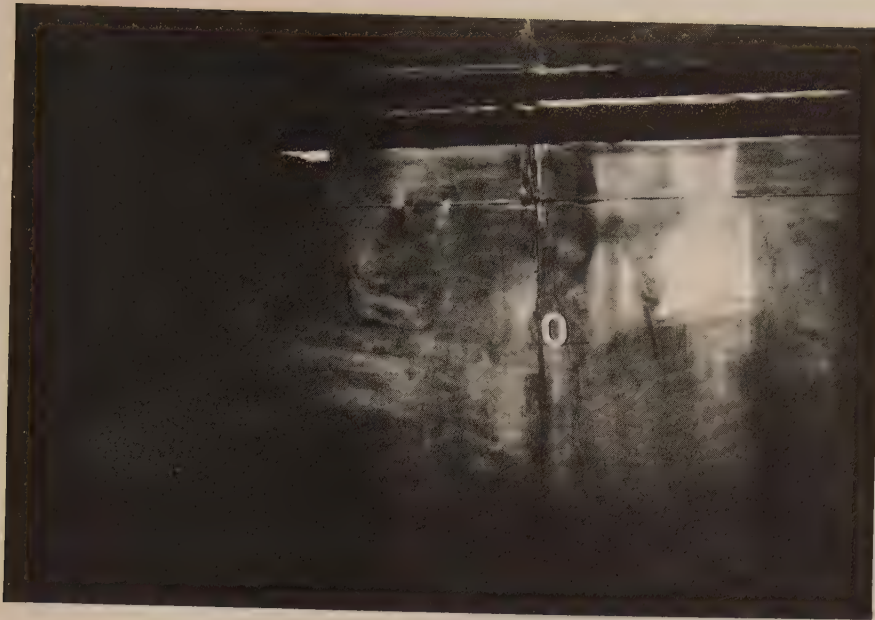


Fig. 69 - Photographies  
d'isochromes (Panneau 4  
Poutre 8).

Effort tranchant

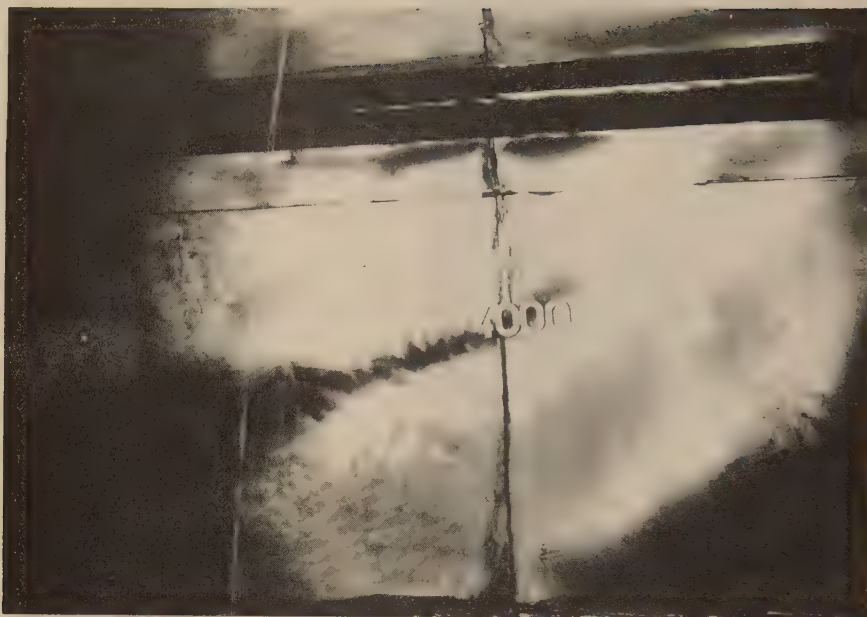


Fig. 69 (suite) - Photographies d'isochromes (Panneau 4 - Poutre 8)

Effort tranchant

#### 4.4.4.2. Observations photoélastiques sur les panneaux soumis à la flexion pure

##### 4.4.4.2.1. Panneaux non raidis

Les photos des isochromes correspondant à différentes valeurs de la charge  $P$  font l'objet de la Fig. 71. Elles sont caractéristiques d'une distribution de contraintes de flexion : sous l'action de la charge, les zones colorées, correspondant à un nombre de frange croissant, apparaissent sur les fibres extrêmes de l'âme. On peut noter en outre deux résultats intéressants confirmant l'analyse par jauges de déformations :

1°) La frange 1 apparaît d'abord dans la zone comprimée, ce qui montre un accroissement des contraintes dans cette région.

2°) La zone noire, correspondant à un état de contrainte nul, s'étend entre la ligne moyenne de la poutre et une partie de l'âme au-dessus de cette ligne.

Le relevé des isoclines (Fig. 72) met en évidence le cheminement des contraintes. Dans la partie inférieure, les contraintes sont dirigées suivant l'horizontale, tandis que dans la partie supérieure, elles prennent une direction oblique. On note en particulier que les isostatiques mettent en évidence les ondes de voilement. (Concentricité des isostatiques autour des extrêmes des ondes). La déformation se fait longitudinalement suivant 3 demi-ondes, ce qui est en accord avec la théorie classique du voilement (voir § 2.1.1.).

##### 4.4.4.2.2. Panneaux raidis

Les isochromes correspondant à différentes valeurs de  $P$  ont été photographiés (voir Fig. 73). La remarque essentielle que l'on puisse déduire de cet examen est que la frange 1 apparaît presque simultanément à la partie supérieure et à la partie inférieure. La zone neutre du panneau se situe au-dessus du milieu géométrique du panneau, ce qui montre que la fibre neutre a été relevée du fait de la présence du raidisseur.

Nous n'avons pas représenté les isoclines dont la direction nous est bien connue puisque le panneau devient entièrement obscur lorsque l'axe du polariseur est vertical, ce qui confirme que le champ de contraintes dans le panneau correspond à un chargement monoaxé. Du fait de la présence permanente des isoclines, les isochromes ont été photographiés en utilisant les lames quart d'onde qui possèdent la propriété de supprimer les isoclines.

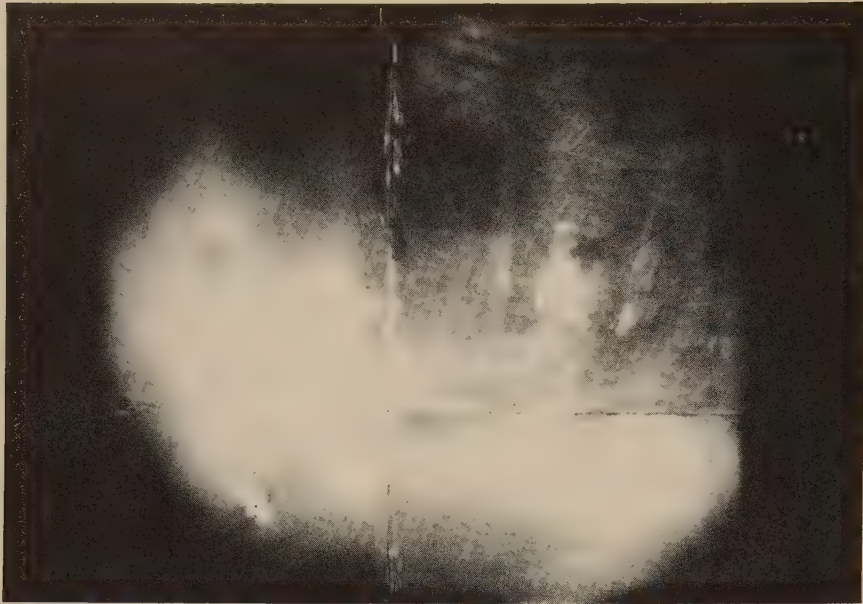


Fig. 71 - Photographies  
d'isochromes (Panneau 3  
Poutre 7) Flexion pure.



Fig. 72 - Tracé des isostatiques sur panneau 3 Poutre 8 (flexion pure)

Légende :    - - - - isostatiques  
                  — isoclines

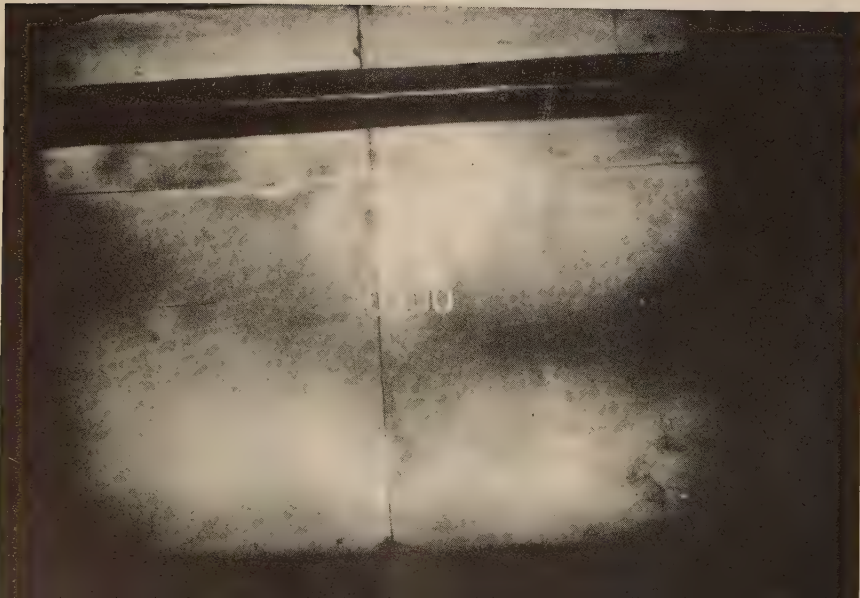
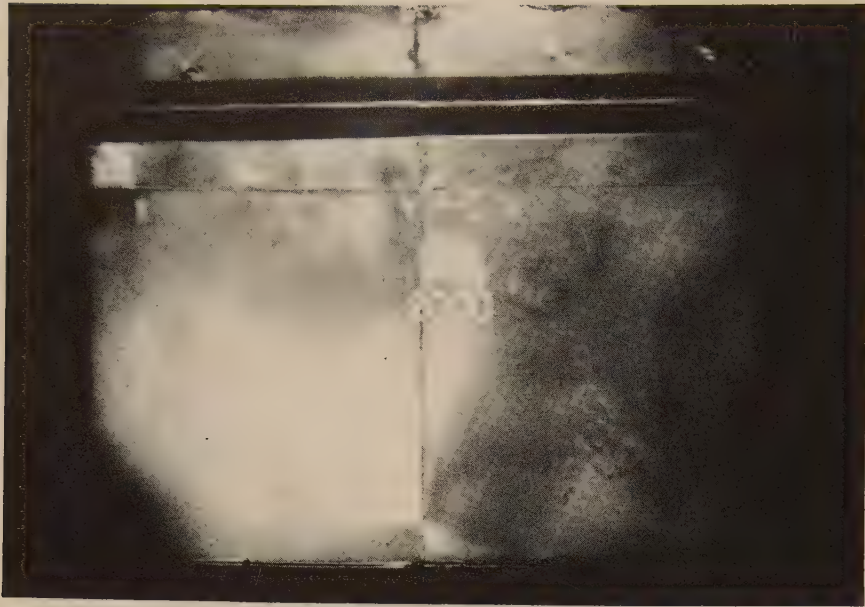


Fig. 73 - Photographies  
d'isochromes (Panneau 3 -  
Poutre 8) Flexion pure

#### 4.2.5. Charges ultimes

On définit par charge ultime, la charge provoquant un accroissement important de la flèche verticale sous un accroissement faible de la charge appliquée. Les Fig. 74 et 75 montrent l'aspect des panneaux après ruine de la poutre. Les résultats obtenus pour chacune des poutres sont les suivants :

Poutres soumises à l'effort tranchant

|   |                 |   |      |   |      |   |      |   |
|---|-----------------|---|------|---|------|---|------|---|
| : | :               | : | :    | : | :    | : | :    | : |
| : | Poutres         | : | 1    | : | 2    | : | 4    | : |
| : | :               | : | :    | : | :    | : | :    | : |
| : | Charges ultimes | : | :    | : | :    | : | :    | : |
| : | en $10^3$ daN   | : | 6,25 | : | 6,75 | : | 9,75 | : |
| : | :               | : | :    | : | :    | : | :    | : |
| : | :               | : | :    | : | :    | : | :    | : |
| : | :               | : | :    | : | :    | : | :    | : |

Poutre soumises à la flexion

|   |                 |   |      |
|---|-----------------|---|------|
| : | :               | : | :    |
| : | Poutres         | : | 7    |
| : | :               | : | 8    |
| : | :               | : | :    |
| : | Charges ultimes | : | 11,8 |
| : | en $10^3$ daN   | : | 13,7 |
| : | :               | : | :    |
| : | :               | : | :    |

(Après mise hors d'usage des panneaux 1, 1', 4 et 4' des poutres 7 et 8 sous l'action de l'effort tranchant, les poutres ont été renforcées aux extrémités et soumises à la flexion pure.)

#### 4.2.6. Détermination du degré d'encastrement des âmes sur les semelles

Nous avons tenté d'évaluer le degré d'encastrement des âmes sur les semelles en procédant à des mesures de flèches sur des cadres ayant pour géométrie la section droite d'une poutre et pour largeur respectivement 10 et 20 mm. Le dispositif expérimental est représenté Fig. 76.

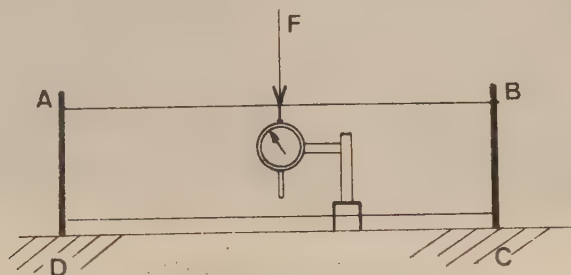
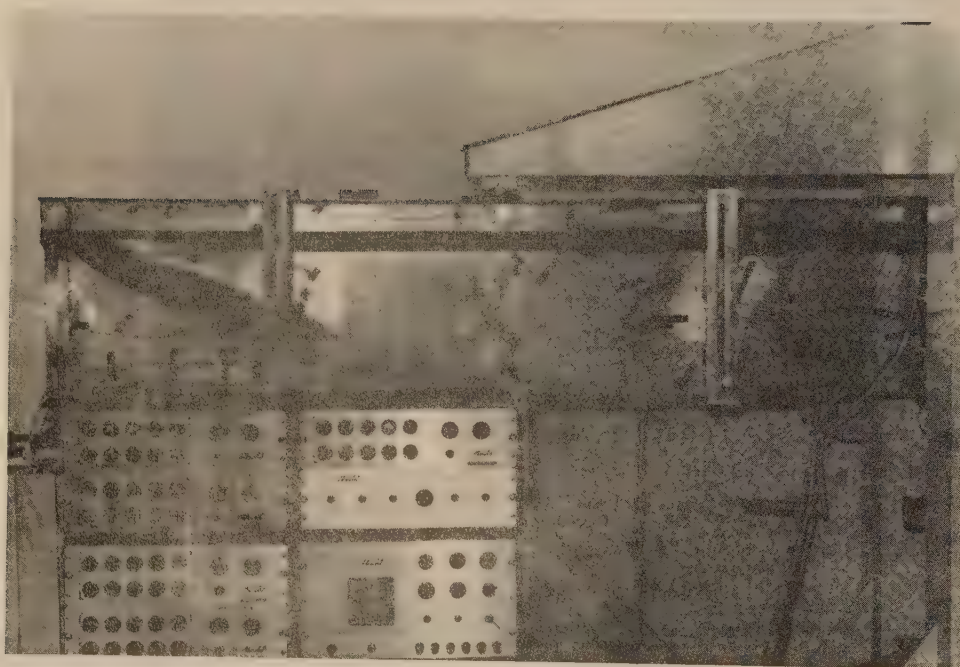


FIG : 76

La flèche au centre de AB sous l'action de la force F permet d'obtenir une première approximation sur la valeur de l'encastrement en comparant cette flèche à celles correspondant à une poutre sur deux appuis ( $\frac{Pl^3}{48EI}$ ) et à une poutre encastrée à ses deux extrémités ( $\frac{Pl^3}{192EI}$ ). Nous avons représenté ces courbes sur la figure 77.

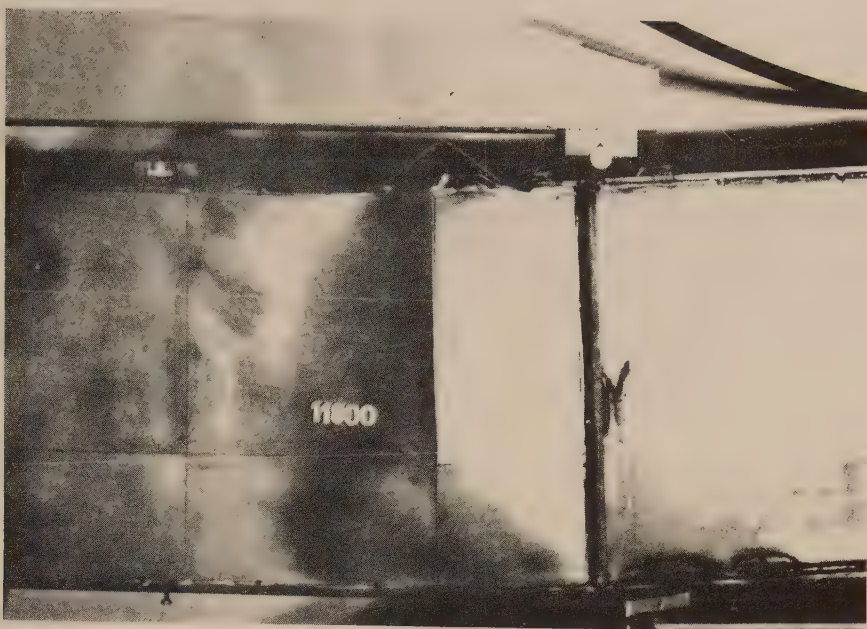


Poutre sans raidisseur

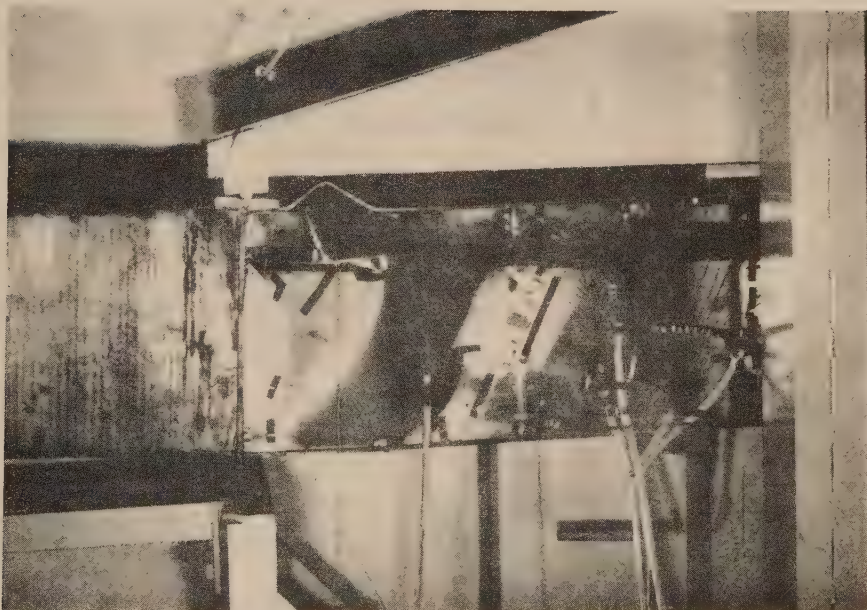


Poutre avec raidisseur

Fig. 74 - Photographies des panneaux de poutres soumis à l'effort tranchant après ruine de la poutre.



Poutre plane



Poutre raidie

Fig. 75 - Photographies des panneaux de poutres soumis à la flexion pure après ruine de la poutre.

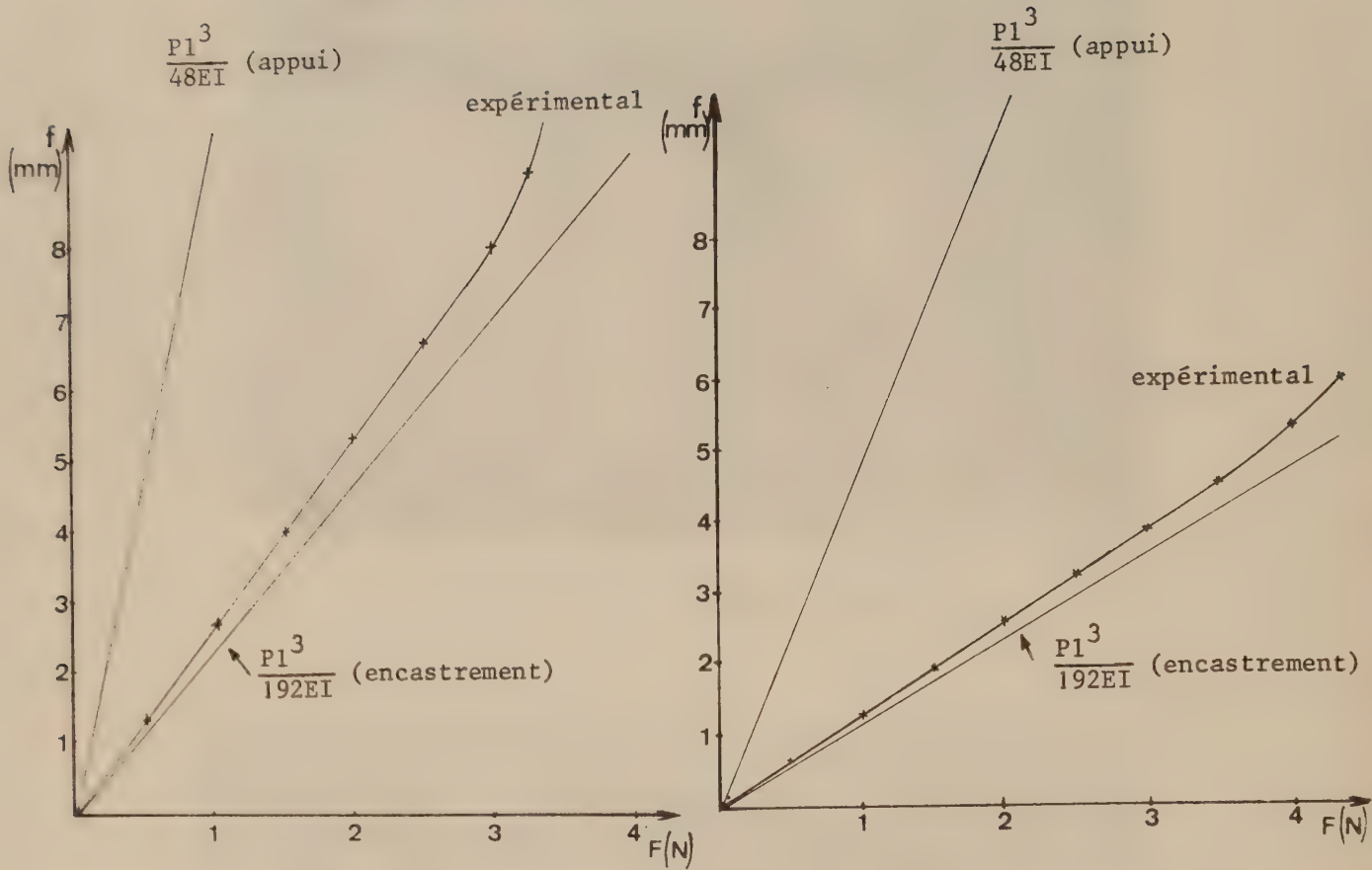
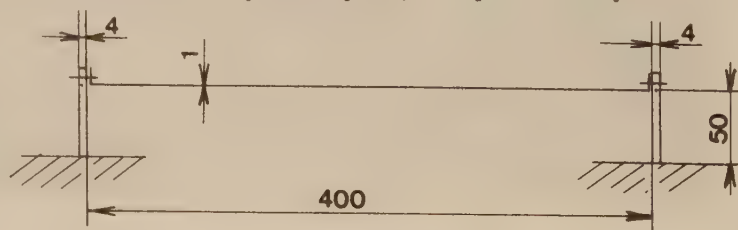


FIG:77

Il semble donc que l'âme soit plus près de l'encastrement que de l'articulation, au point de vue condition d'appui sur les semelles.

Une autre approche de la détermination du degré d'encastrement peut être faite en considérant les rigidités relatives de l'âme et de la semelle. La poutre étant soumise à des efforts symétriques, on peut analyser la structure ci-dessous :



- Raideur des "montants" verticaux  $\frac{EI}{l} = E \cdot 1,28 \text{ mm}^3$

- Raideur de la "poutre" transversale  $\frac{EI}{l} = E \times \frac{1}{400} \text{ mm}^3$

Le rapport de ces deux raideurs montre qu'en fait les montants verticaux se comportent pratiquement comme des encastrements.

Les observations expérimentales décrites au Chapitre 4 nous ont amenés à constater un certain comportement des poutres dans le domaine post critique de voilement. Nous avons à l'occasion de chaque type d'essai, tenté de donner une justification du phénomène expérimental, nous inspirant pour cela des hypothèses de BASLER, précédemment discutées.

Un point particulièrement intéressant à développer réside dans la comparaison des charges ultimes calculées par la théorie de BASLER avec les correctifs que nous y avons apporté et des charges expérimentales. Pour les poutres raidies longitudinalement par un raidisseur, nous ébaucherons en outre, en partant des observations photoélastiques, une théorie permettant d'évaluer l'effort tranchant ultime.

#### 5.1 - CHARGES ULTIMES CORRESPONDANT A LA RUINE DE LA POUTRE SOUS L'ACTION DE L'EFFORT TRANCHANT

##### 5.1.1. Poutres non raidies

##### 5.1.1.1. Tableau des résultats

Nous définirons pour la comparaison des résultats expérimentaux avec les valeurs théoriques les charges suivantes :

- $P_{cr}$  : Charge critique calculée par la théorie linéaire des plaques, la plaque étant supposée simplement appuyée sur ses bords.
- $P'_{cr}$  : Charge critique calculée par la théorie linéaire des plaques, la plaque ayant ses côtés encastres.
- $P_{u1}$  : Charge ultime calculée par la théorie de BASLER, utilisant le critère de VON MISES et la forme approchée de  $\sigma_t$  (plaque supposée appuyée).
- $P'_{u1}$  : Charge ultime calculée par la théorie de BASLER, utilisant le critère de VON MISES et la forme exacte de  $\sigma_t$  (plaque appuyée).
- $P_{u2}$  : Charge ultime calculée par la théorie de BASLER utilisant le critère de VON MISES et la forme approchée de  $\sigma_t$  (plaque supposée encastree).
- $P'_{u2}$  : Charge ultime calculée par la théorie de BASLER utilisant le critère de VON MISES et la forme exacte de  $\sigma_t$  (plaque encastree).
- $P_{u3}$  : Charge ultime calculée par application du critère de TRESCA utilisant la forme approchée de  $\sigma_t$  (plaque supposée appuyée).

- $P'_{u3}$  : Charge ultime calculée par application du critère de TRESCA utilisant la forme exacte de  $\sigma_t$  (plaque appuyée).
- $P_{u4}$  : Charge ultime calculée par application du critère de TRESCA utilisant la forme approchée de  $\sigma_t$  (plaque supposée encastrée).
- $P'_{u4}$  : Charge ultime calculée par application du critère de TRESCA utilisant la forme exacte de  $\sigma_t$  (plaque encastrée).

Ces valeurs sont groupées dans le tableau ci-dessous :

| Poutres: | Théorie              | VON MISES |           |                      |                      | TRESCA               |          |  |  | Expérience |
|----------|----------------------|-----------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------|--|--|------------|
|          |                      | linéaire  | appuyé    | encastré             |                      | appuyé               | encastré |  |  |            |
|          | $P_{cr}$ : $P'_{cr}$ | $P_{ul}$  | $P'_{ul}$ | $P_{u2}$ : $P'_{u2}$ | $P_{u3}$ : $P'_{u3}$ | $P_{u4}$ : $P'_{u4}$ | $P_{ex}$ |  |  |            |
| 1        | 20200:32400          | 181080    | 19816     | 229120:25088         | 176640:192530        | 214400:233690        | 62100    |  |  |            |
| 5        | 9290:14858           | 64081     | 67092     | 67992:71186          | 63578: 66753         | 67024: 70520         | 59500    |  |  |            |
| 7        | 9290:14858           | 64081     | 67092     | 67992:71186          | 63578: 66753         | 67024: 70520         | 68000    |  |  |            |

\* Toutes les charges sont exprimées en Newton.

Il est nécessaire pour la comparaison de ces résultats, de connaître l'incertitude commise sur les valeurs théoriques de l'effort tranchant ultime.

#### 5.1.1.2. Calculs d'erreurs

Valeurs utilisées pour ces calculs :

$$b = 400 \pm 2 \text{ (mm)}$$

$$a = 940 \pm 4 \text{ (mm)}$$

$$\alpha = \frac{a}{b}$$

$$h = 1 \pm 0,04 \text{ (mm)}$$

$$k_2 = 6,1 \pm 0,2$$

$$l' = 70 \pm 1 \text{ (mm)}$$

$$h' = 4 \pm 0,2 \text{ (mm)}$$

$$E = 20\ 000 \pm 800 \text{ (hbars)}$$

$$\sigma_e = 20 \pm 1 \text{ (hbar)}$$

$$\tau_e = \frac{\sigma_e}{2}$$

$$\nu = 0,30 \pm 0,04$$

$$A_a = b \cdot h$$

$$A_m = l' \times h'$$

$$\rho = \frac{A_a}{A_m}$$

Calcul d'erreur sur l'expression simplifiée de  $\frac{T_u}{T_p}$

$$\frac{T_u}{T_p} = \frac{\tau_{cr}}{\tau_e} + \frac{1 - \frac{\tau_{cr}}{\tau_e}}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \quad \text{avec} \quad \tau_{cr} = k_2 \cdot \frac{\pi^2 E \cdot h^2}{12(1 - \nu^2) \cdot b^2}$$

Calculs auxiliaires

$$1 - \frac{d \frac{\tau_{cr}}{\tau_e}}{\frac{\tau_{cr}}{\tau_e}} = \frac{dk}{k} + \frac{dE}{E} + 2 \frac{dh}{h} - \frac{d(1 - \nu^2)}{1 - \nu^2} - 2 \frac{db}{b} - \frac{d\sigma_e}{\sigma_e}$$

$$\frac{\tau_{cr}}{\tau_e} = \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta E}{E} + 2 \frac{\Delta h}{h} + \frac{2 \nu \Delta \nu}{1 - \nu^2} + \frac{2 \Delta b}{b} + \frac{\Delta \sigma_e}{\sigma_e}$$

$$\Delta \frac{\tau_{cr}}{\tau_e} = 0,238 \quad \Delta \frac{\tau_{cr}}{\tau_e} = 0,238 \times 0,0678 = 0,01732$$

$$2 - \frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{da}{a} - \frac{db}{b}$$

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \frac{9,4}{1000} \Rightarrow \Delta \alpha = 0,024$$

Calcul de l'erreur sur  $\frac{T_u}{T_p}$

$$d \left( \frac{T_u}{T_p} \right) = d \left[ \frac{\tau_{cr}}{\tau_e} \right] - \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} d \left[ 1 - \frac{\tau_{cr}}{\tau_e} \right] + \left[ 1 - \frac{\tau_{cr}}{\tau_e} \right] d \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \right]$$

$$= \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \right] d \left( \frac{\tau_{cr}}{\tau_e} \right) - \frac{\alpha}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \left( 1 - \frac{\tau_{cr}}{\tau_e} \right) d \alpha$$

$$\Delta \left( \frac{T_u}{T_p} \right) = \left| 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \right| \Delta \left( \frac{\tau_{cr}}{\tau_e} \right) + \left| \frac{\alpha}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \left( 1 - \frac{\tau_{cr}}{\tau_e} \right) \right| \Delta \alpha$$

$$= 0,609 \cdot 0,01732 + 0,132 \cdot 0,024$$

$$= 0,010 + 0,004 = 0,014$$

$$\Delta \left( \frac{T_u}{T_p} \right) = \frac{0,014}{0,432} = 0,032$$

3,2 %

Calcul d'erreur sur l'expression de  $\frac{T_u}{T_p}$  utilisant la forme exacte de  $\sigma_t$

$$\frac{T_u}{T_p} = \frac{\tau_{cr}}{\tau_e} + \frac{\sigma_t}{\tau_e \sqrt{1+\alpha^2}}$$

avec

$$\sigma_t = -2 \tau_{cr} \sin 2\varphi + \sqrt{4 \tau_{cr}^2 \sin^2 2\varphi - (4 \tau_{cr}^2 - \tau_e^2)}$$

$$\varphi = \arctg (\sqrt{1+\alpha^2} - \alpha)$$

Remarques :

$$1 - \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{1+\alpha^2} - \alpha \quad \operatorname{tg} \varphi + \alpha = \sqrt{1+\alpha^2} \quad \operatorname{tg}^2 \varphi + 2\alpha \operatorname{tg} \varphi = 1$$

$$\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{2 \operatorname{tg} \varphi} = \cotg 2\varphi$$

$$2 - \sqrt{1+\alpha^2} = \operatorname{tg} \varphi + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{2 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{2 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{1}{\sin 2\varphi}$$

$$3 - \sigma_t = -2 \tau_{cr} \sin 2\varphi + 2 \sqrt{\tau_{cr}^2 \sin^2 2\varphi - \tau_{cr}^2 + \tau_e^2}$$

$$= -2 \tau_{cr} \sin 2\varphi + 2 \sqrt{\tau_e^2 - \tau_{cr}^2 \cos^2 2\varphi}$$

d'où :

$$\frac{T_u}{T_p} = \frac{\tau_{cr}}{\tau_e} + \frac{-2 \tau_{cr} \sin 2\varphi + 2 \sqrt{\tau_e^2 - \tau_{cr}^2 \cos^2 2\varphi}}{\tau_e} \sin 2\varphi$$

$$\frac{\tau_{cr}}{\tau_e} - 2 \frac{\tau_{cr}}{\tau_e} \sin^2 2\varphi + 2 \sin 2\varphi \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_e}\right)^2 \cos^2 2\varphi}$$

et en posant

$$\frac{\tau_{cr}}{\tau_e} = \lambda$$

$$\frac{T_u}{T_p} = \lambda \cos 4\varphi + 2 \sin 2\varphi \sqrt{1 - \lambda \cos^2 2\varphi}$$

Calcul de l'erreur sur  $\frac{T_u}{T_p}$

$$d\left(\frac{T_u}{T_p}\right) = d\lambda \cos 4\varphi - 4\lambda \sin 4\varphi d\varphi + 4 \cos^2 \varphi \sqrt{1 - \lambda \cos^2 2\varphi} \cdot d\varphi$$

$$+ \frac{4\lambda \sin^2 2\varphi \cdot \cos 2\varphi}{\sqrt{1 - \lambda \cos^2 2\varphi}} - \frac{2 \sin 2\varphi \cdot \cos^2 2\varphi}{\sqrt{1 - \lambda \cos^2 2\varphi}} \cdot d\lambda$$

$$= \left[ \cos 4\varphi - \frac{2 \sin 2\varphi \cos^2 2\varphi}{\sqrt{1 - \lambda \cos^2 2\varphi}} \right] d\lambda + \left[ -4\lambda \sin 4\varphi + 4 \cos 2\varphi \sqrt{1 - \lambda \cos^2 2\varphi} + \frac{4\lambda \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi}{\sqrt{1 - \lambda \cos^2 2\varphi}} \right] d\varphi$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \cos 4\varphi - \frac{2 \sin 2\varphi \cos^2 2\varphi}{\sqrt{1 - \lambda \cos^2 2\varphi}} \right] d\lambda \\
 &\quad + \left[ \frac{-4 \lambda \sin 4\varphi + 4 \cos 2\varphi - 4 \lambda \cos^3 2\varphi + 4 \lambda \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi}{\sqrt{1 - \lambda \cos^2 2\varphi}} \right] d\varphi \\
 &= \left[ \cos 4\varphi - \frac{2 \sin 2\varphi \cos^2 2\varphi}{\sqrt{1 - \lambda \cos^2 2\varphi}} \right] d\lambda + d\varphi \left[ -4 \lambda \sin 4\varphi + \frac{4 \cos 2\varphi - \lambda \cos 2\varphi \cos 4\varphi}{\sqrt{1 - \lambda \cos^2 2\varphi}} \right] \\
 &= \left[ \frac{1 - \operatorname{tg}^2 2\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi} - \frac{2 \operatorname{tg} 2\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi - \lambda}} \right] d\lambda \\
 &\quad + \left[ -4 \lambda \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi} + \frac{4 - 4 \lambda \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 2\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi - \lambda}} \right] d\varphi \\
 &= \left[ 1 - \operatorname{tg}^2 2\varphi - \frac{2 \operatorname{tg} 2\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi - \lambda}} \right] \frac{d\lambda}{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi} \\
 &\quad - \left[ 2 \lambda \operatorname{tg} 2\varphi + \frac{\lambda(1 - \operatorname{tg}^2 2\varphi) - (1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi - \lambda}} \right] \frac{4 d\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \left( \frac{T_u}{T_p} \right) &= \left| 1 - \operatorname{tg}^2 2\varphi - \frac{2 \operatorname{tg} 2\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi - \lambda}} \right| \frac{\Delta \lambda}{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi} \\
 &\quad + \left| 2 \lambda \operatorname{tg} 2\varphi + \frac{\lambda(1 - \operatorname{tg}^2 2\varphi) - (1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi - \lambda}} \right| \frac{4 \Delta \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi} \\
 &= 0,029 \cdot \frac{0,01732}{1,193} + 1,842 \cdot \frac{4 \cdot \Delta \varphi}{1,193}
 \end{aligned}$$

Or

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta \alpha}{2(1 + \cot^2 2\varphi)}$$

d'où

$$\frac{\Delta T_u}{T_p} = 0,0003 + 1,842 \cdot \frac{4 \cdot 0,024}{1,193 \cdot 2(6,171)}$$

$$= 0,012$$

$$\frac{\Delta \left( \frac{T_u}{T_p} \right)}{\frac{T_u}{T_p}} = \frac{0,012}{0,432} = 0,028$$

$$\underline{\underline{2,8 \%}}$$

× Erreurs dues à l'expérimentation ou aux défauts de fabrication.

Dans les calculs d'erreurs du paragraphe précédent, nous n'avons tenu compte que des erreurs systématiques sur les éléments intervenant dans les expressions de  $\frac{T_u}{T_p}$ .

Il vient en fait se superposer une incertitude supplémentaire due aux erreurs éventuelles de manipulation du type :

- excentrement de la charge
- gauchissement inévitable de la poutre
- frottement sur appuis
- faiblesse locale autour des points de soudure

Compte tenu du nombre limité de nos expériences, l'importance de l'incertitude engendrée par ces dispositions particulières, n'a pu être chiffrée avec précision. Nous pensons toutefois que compte tenu des précautions prises, il est possible d'évaluer cette incertitude à 5 %.

Pour les poutres soumises à l'effort tranchant, on peut donc estimer l'erreur relative sur la charge ultime à  $5 + 3 = 8$  %.

#### 5.1.1.3. Comparaison des résultats expérimentaux aux charges théoriques

En se reportant aux tableaux des résultats, on remarque :

1°) Il n'existe aucune concordance entre les charges critiques, calculées suivant la théorie linéaire des plaques et les charges ultimes. (La charge ultime est de 6 à 8 fois supérieure à la charge critique calculée pour un panneau supposé librement appuyé sur ses bords et 4 à 5 fois supérieure à la charge critique calculée pour un panneau encastré sur ses bords.

2°) La poutre 7 donne une très bonne concordance avec la charge ultime calculée en appliquant le critère de TRESCA, les panneaux étant supposés encastrés sur leur contour. (Nous pensons que cette hypothèse se justifie, compte tenu des résultats d'expériences décrites au § 4.2.6.).

3°) La poutre 5 a péri pour une charge inférieure à la charge théorique prévue. Si le résultat est relativement proche de la valeur théorique (15 %), il est cependant hors calcul d'erreur. La justification de ce fait est que la poutre a péri prématurément par suite d'une faiblesse locale au niveau des points de soudure extrêmes du panneau. Il est probable que sans cette faiblesse locale, la poutre aurait pu supporter une charge plus importante.

4°) La poutre 1, nous l'avons déjà signalé, n'a servi qu'à analyser qualitativement le phénomène du voilement, et a péri bien avant que la charge ultime

théorique soit atteinte par suite<sup>du</sup> poinçonnement de la semelle inférieure par le raidisseur central.

### 5.1.2. Poutres raidies

Nous avons vu au chapitre 3 les corrections logiques susceptibles d'être apportées à la théorie de BASLER. Par ailleurs, les expériences détaillées au chapitre 4, nous permettent d'ébaucher une méthode permettant de déterminer la charge ultime que peut encaisser une poutre caisson à âmes minces soumise à l'effort tranchant, ou à la flexion pure, lorsque cette poutre comporte un raidisseur longitudinal embouti.

#### 5.1.2.1. Ebauche d'une théorie

Les observations faites lors des essais, en particulier celles résultant de l'étude par plastique photoélastique, semblent montrer que chaque sous panneau peut développer un champ de tension indépendamment du sous panneau adjacent. Nous désignerons par "1" et "2" respectivement les sous panneaux supérieurs et inférieurs, et par  $T_1$  et  $T_2$ , l'effort tranchant ultime que pourrait supporter, séparément, chacun de ces deux sous panneaux (Voir Fig. 78).

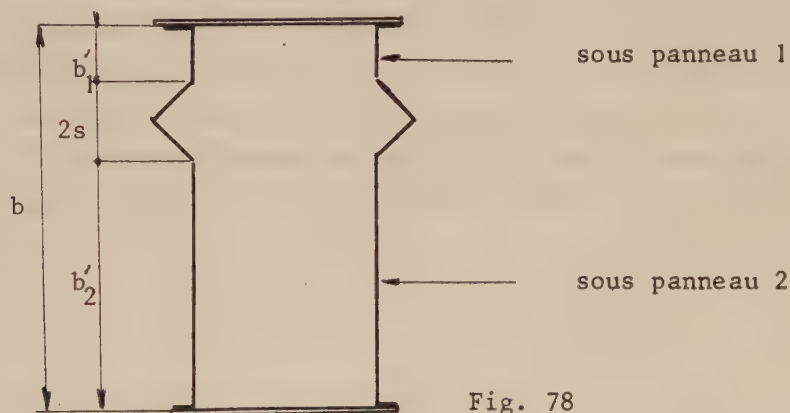


Fig. 78

En se basant sur l'observation de poutres raidies conduites à rupture, COOPER (Réf. 25) avance l'hypothèse que l'effort tranchant ultime que peut supporter la poutre est égal à :

$$T_u = T_1 + T_2$$

Nous retiendrons cette hypothèse puisqu'expérimentalement, il semble qu'il y ait effectivement indépendance entre les champs de tension de chacun des sous panneaux (intensité et inclinaison différentes) (voir Fig. 68, 69, 70).

Nous devons tenir compte cependant du comportement particulier du raidisseur embouti. Nous avons vu expérimentalement (évolution des flèches latérales § 4.4.2.1.) que sous charge croissante le raidisseur longitudinal se déformait,

entraînant dans sa déformation les sous panneaux adjacents. Du fait de sa déformation, le raidisseur longitudinal est inefficace pour s'opposer aux contraintes de cisaillement et il ne faudra tenir compte dans le calcul de  $T_1$  et  $T_2$  que des largeurs  $b'_1$  et  $b'_2$ , hors raidisseurs, comme représenté sur la Fig. 78.

Avec cette remarque et utilisant la théorie développée au § 3.2.1.2, les expressions de  $T_1$  et  $T_2$  s'écriront sous forme non dimensionnelle :

$$\frac{T_1}{T_{p1}} = \left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_e}\right)_1 + \frac{1 - (\tau_{cr}/\tau_e)_1}{\sqrt{1 + \alpha_1^2}} \quad \alpha_1 = \frac{a}{b'}_1$$

$$\frac{T_2}{T_{p2}} = \left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_e}\right)_2 + \frac{1 - (\tau_{cr}/\tau_e)_2}{\sqrt{1 + \alpha_2^2}} \quad \alpha_2 = \frac{a}{b'}_2$$

Il reste cependant une restriction à observer vis-à-vis des déformations relatives de deux sous panneaux. Dans un panneau raidi longitudinalement, il est possible pour un sous panneau d'avoir une coefficient de finesse faible tandis que l'autre est élevé. Dans un tel cas, l'un des panneaux peut atteindre la phase plastique, alors que l'autre se comporte encore élastiquement. Il n'est pas certain que ce dernier sous panneau puisse supporter les déformations qui sont associées au sous panneau en phase plastique sans qu'un des éléments de contour de ce sous panneau périclite. De ce fait, il est nécessaire d'éliminer la possibilité à un sous panneau d'atteindre l'état plastique ce qui peut être fait en posant :

$$\left(\frac{T_u}{T_p}\right)_1 = 1 \quad \text{pour} \quad \left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_e}\right)_1 > 1$$

$$\left(\frac{T_u}{T_p}\right)_2 = 1 \quad \text{pour} \quad \left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_e}\right)_2 > 1$$

Les valeurs critiques des contraintes de cisaillement des sous panneaux peuvent être trouvées à partir des courbes  $k_2 = f(\alpha)$  représentées sur la Fig. 6. Puisque le degré d'encastrement est faible le long du raidisseur embouti et comme nous ne savons pas traiter le cas d'une plaque encastree sur un bord longitudinal et libre ou même seulement appuyé sur l'autre bord longitudinal, nous ferons l'hypothèse que les semelles et le raidisseur longitudinal se comportent comme des appuis simples. Notons que les calculs effectués sur un panneau plan sans raidisseur

soumis à l'effort tranchant, ont montré (voir tableau 5.1.1.1.) que la divergence des résultats pour les deux hypothèses extrêmes (tous les côtés appuyés ou tous les côtés encastrés) était faible, ce qui justifie que nous puissions faire l'hypothèse énoncée ci-dessus sans trop de risque d'erreur.

\* Exigences géométriques du raidisseur longitudinal

Le raidisseur longitudinal doit répondre à deux exigences :

- 1°) Il doit être suffisamment rigide pour former une ligne nodale dans la déformée de l'âme, séparant ainsi les champs de tension qui se forment dans les sous panneaux.
- 2°) Il doit avoir une surface suffisante pour transférer les composantes horizontales des champs de tension entre les raidisseurs verticaux.

La première exigence peut être satisfaite en fournissant au raidisseur la rigidité optimum  $\gamma_L^*$  obtenue par l'analyse du voilement de l'âme. Cette rigidité optimum correspond à une inertie du raidisseur qui permet de forcer une ligne nodale dans la plaque lors du voilement. Pour une valeur inférieure de  $\gamma$ , le raidisseur est entraîné par la plaque dans le voilement ; pour une valeur supérieure de  $\gamma$  on obtient la même déformée qu'en présence du raidisseur de rigidité  $\gamma_L$ . (Ligne nodale au droit du raidisseur). Il n'y a donc aucun intérêt à utiliser pour  $\gamma$  les valeurs supérieures à  $\gamma_L^*$ .

La deuxième exigence permet de définir l'aire minimum du raidisseur longitudinal. La composante horizontale du champ de tension s'écrit :

$$F_h = \sigma_t \cdot h \cdot \frac{b}{2} \cos \theta = \sigma_t \cdot h \cdot \frac{b}{2} \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

L'aire correspondante du raidisseur longitudinal sera :

$$A^* = \frac{F_h}{\sigma_e}$$

Cette aire peut être représentée par le coefficient non dimensionnel :

$$\delta = \frac{A^*}{A_a} = \frac{\sigma_t}{\sigma_e} \cdot \frac{\alpha}{2\sqrt{1+\alpha^2}}$$

où  $A_a$  représente l'aire de l'âme.

En utilisant l'expression approchée de  $\sigma_t$  donnée par l'équation

88 :

$$\delta = \frac{\alpha}{2\sqrt{1+\alpha^2}} \left( 1 - \frac{\tau_{cr}}{\tau_e} \right)$$

Sauf lorsque le raidisseur longitudinal est à mi-hauteur, les composantes horizontales du champ de tension dans les deux sous panneaux seront différentes en intensité. Le raidisseur longitudinal doit donc être tel qu'il puisse supporter la différence entre les deux composantes horizontales du champ de tension. Soit  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , les coefficients d'aire déterminés par la considération des composantes horizontales des champs de tension respectivement dans les sous panneaux "1" et "2". La condition requise pour le raidisseur s'écrit :

$$\delta^x = |\delta_1 - \delta_2|$$

#### 5.1.2.2. Tableau des résultats

En conservant les mêmes définitions de  $P_{cr}$ ,  $P_{ul}$ ,  $P'_{ul}$ ,  $P_{u3}$ ,  $P'_{u3}$  qu'au § 5.1.1., nous obtenons :

|         |          | VON MISES |           | TRESCA   |           |            |
|---------|----------|-----------|-----------|----------|-----------|------------|
| Poutres | Théorie  |           |           |          |           | Expérience |
|         | linéaire | approché  | exact     | approché | exact     |            |
|         | $P_{cr}$ | $P_{ul}$  | $P'_{ul}$ | $P_{u3}$ | $P'_{u3}$ | $P_{ex}$   |
| 2       | 138760   | 205520    | 220268    | 193794   | 214896    | 68200      |
| 4       | 138760   | 205520    | 220268    | 193794   | 214896    | 98700      |
| 6       | 16480    | 67644     | 69667     | 63888    | 65534     | 59000      |
| 8       | 16480    | 67644     | 69667     | 63888    | 65534     | 58500      |
|         |          |           |           |          |           |            |

En accord avec la théorie précédemment ébauchée, nous nous sommes essentiellement intéressés aux valeurs de l'effort tranchant ultime obtenues en considérant chaque panneau appuyé simplement sur son contour.

#### 5.1.2.3. Comparaison des résultats expérimentaux avec les charges théoriques

1°) On remarque que les charges critiques déterminées par la théorie linéaire des plaques sont de 3 à 4 fois inférieures aux charges de ruine de la poutre.

2°) La corrélation entre les charges ultimes expérimentales et les charges ultimes théoriques est bonne (à l'intérieur de la zone d'incertitude évaluée en 5.1.1.), pour les poutres 6 et 8. Il semble toutefois que les deux résultats expérimentaux, pratiquement identiques, tendent à prouver que la théorie précédemment ébauchée ne mette pas suffisamment en évidence le rôle plutôt néfaste du raidisseur longitudinal embouti, pour les panneaux soumis à l'effort tranchant.

3°) Les poutres 2 et 4 qui ont servi à l'élaboration d'un modèle définitif de poutre d'essai ont péri prématurément par cisaillement des vis d'assemblage âme-semelle.

## 5.2 - CHARGES ULTIMES CORRESPONDANT A LA RUINE DE LA POUTRE SOUS L'ACTION DU MOMENT DE FLEXION

### 5.2.1. Observations expérimentales

L'étude expérimentale des déformées latérales des panneaux raidis soumis à la flexion pure a montré que l'accroissement des flèches latérales était plus faible que celui des panneaux non raidis sous les mêmes sollicitations (voir Fig.55 et 56).

Par ailleurs, le relevé des déformations linéiques sur différentes sections d'un panneau et la distribution de contraintes qui en a été déduite (voir Fig. 63) montre que ce panneau fait participer toute sa section à la résistance à la flexion alors que pour un panneau non raidi, il se produit une redistribution des contraintes vers la semelle supérieure (Fig. 62), ce qui engendre une diminution de la capacité portante de la poutre.

De ces observations, on peut donc déduire que la présence du raidisseur longitudinal permet d'identifier le comportement d'une poutre plane à coefficient de finesse élevé à celui d'une poutre, obéissant à l'équation de Navier et faisant travailler toute sa section.

#### \* Exigences géométriques du raidisseur longitudinal

Bien que la résistance ultime de la poutre caisson ne soit pas directement reliée à la charge de voilement des âmes, le contrôle des déflexions latérales de l'âme au moyen d'un raidisseur longitudinal est semblable au problème de l'accroissement de la résistance au voilement des âmes en forçant une ligne nodale dans la déformée. C'est pourquoi nous ferons l'hypothèse que la position optimum du raidisseur au point de vue voilement de l'âme est aussi la plus effective pour le contrôle des déflexions latérales.

Des études faites en particulier par DUBAS (Réf. 27) ont montré que pour la flexion pure la position au  $1/5^{\text{ème}}$  supérieur était théoriquement bonne. En fait, COOPER (Réf. 25) a montré expérimentalement que ce positionnement était aussi dépendant du coefficient de finesse du panneau. Ainsi, dans nos expériences, il semble que la position optimale du raidisseur aurait été au  $1/4$  supérieur (afin de limiter le déplacement vertical de la fibre neutre de la poutre).

La valeur de la rigidité requise pour l'inertie du raidisseur longitudinal a été calculée par Massonnet (Réf. 26). Pour un raidisseur au  $1/5^{\text{ème}}$  supérieur d'une plaque soumise à la flexion pure, Massonnet donne pour expression de la rigi-

dité optimum :

$$\gamma^* = 3,87 + 5,1 \alpha + (8,82 + 77,6 \delta) \alpha^2$$

avec  $\alpha = \frac{a}{b}$  et  $\delta = \frac{\text{Aire du raidisseur}}{\text{Aire de l'âme}}$

Puisqu'il n'apparaît pas de champ de tension lors de la flexion, il n'y a pas de composante horizontale à transmettre et par conséquent pas d'exigences particulières sur la section du raidisseur.

Notons que pour un coefficient de forme  $\alpha = 2,35$ , la rigidité relative optimale selon Massonnet serait  $\gamma^* = 65$ . Nous avons utilisé une valeur de  $\gamma$  égale à 110 : nous étions donc nettement surabondant.

### 5.2.2. Tableau des résultats

Nous définirons pour la comparaison des résultats expérimentaux avec les valeurs théoriques les charges suivantes :

- $P_{u5}$  : Charge ultime calculée par la théorie de BASLER des poutres soumises à la flexion pure ( $\rho = 0,5$ ) (Plaque appuyée).
- $P'_{u5}$  : Charge ultime calculée en tenant compte de la valeur exacte de  $\rho = \frac{A_a}{A_m}$  (Plaque appuyée).
- $P_{u6}$  : Charge ultime calculée par la théorie de BASLER des poutres soumises à la flexion pure ( $\rho = 0,5$ ). (Plaque encastree).
- $P'_{u6}$  : Charge ultime calculée en tenant compte de la valeur exacte de  $\rho = \frac{A_a}{A_m}$  (Plaque encastree).

$P_{cr}$  et  $P'_{cr}$  sont les charges critiques calculées par la théorie linéaire des poutres respectivement pour une plaque appuyée ou encastree.

On peut dresser le tableau suivant :

| Poutres | Charges critiques |           | Charges ultimes |           |          |           | Charges expérimentales |  |
|---------|-------------------|-----------|-----------------|-----------|----------|-----------|------------------------|--|
|         | appuyé            | encastree | appuyé          | encastree |          |           |                        |  |
|         | $P_{cr}$          | $P'_{cr}$ | $P_{u5}$        | $P'_{u5}$ | $P_{u6}$ | $P'_{u6}$ | $P_{ex}$               |  |
| 7       | 14200             | 23100     | 112700          | 126000    |          | 129460    | 118600                 |  |
| 8       | 75530             |           | 138760          | 138760    |          | 138760    | 138800                 |  |

Charges en Newton

La charge  $P_{u6}$  n'a pas à notre connaissance, été calculée par BASLER qui se limite au

cas de panneaux appuyés sur leur contour.

Pour la poutre 8, la charge  $P'_{cr}$  n'a pas non plus, à notre connaissance, été calculée (application de la théorie linéaire à une plaque encastree, comportant un raidisseur longitudinal au  $1/5^{\text{ème}}$  supérieur de la hauteur de l'âme.

### 5.2.3. Calculs d'erreur

Calcul d'erreur sur l'expression de  $\frac{M_u}{M_e}$  pour  $\beta = \beta_A$

$$\frac{M_u}{M_e} = \frac{1 + \frac{\rho}{4}}{1 + \frac{\rho}{6}}$$

Calcul préliminaire :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dA_a}{A_a} - \frac{dA_m}{A_m} = \frac{dh}{h} + \frac{db}{b} - \frac{dh'}{h'} - \frac{dl'}{l'}$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta h'}{h'} + \frac{\Delta l'}{l'} = 0,154$$

$$\Delta\rho = 0,154 \times 1,35 = 0,208$$

Erreur sur  $\frac{M_u}{M_e}$

$$\frac{d\left(\frac{M_u}{M_e}\right)}{\frac{M_u}{M_e}} = \frac{d\left(1 + \frac{\rho}{4}\right)}{1 + \frac{\rho}{4}} - \frac{d\left(1 + \frac{\rho}{6}\right)}{1 + \frac{\rho}{6}} = \frac{d\rho}{4+\rho} - \frac{d\rho}{6+\rho}$$

$$\frac{\Delta\left(\frac{M_u}{M_e}\right)}{\frac{M_u}{M_e}} = \Delta\rho \cdot \frac{2}{(4+\rho)(6+\rho)} = 0,208 \times 0,051 = 0,01056$$

1 %

Calcul d'erreur sur l'expression de  $\frac{M_u}{M_e}$  pour  $\beta = \beta_B$

$$\frac{M_u}{M_e} = \frac{\eta^2 + \frac{\rho}{3} \eta^3 + (1-\eta)^2 + \frac{\rho}{16} \left(\frac{31}{32} - \eta\right)^2}{(1-\eta) \left(1 + \frac{\rho}{6}\right)}$$

avec  $\eta = \sqrt{\frac{15}{128} + \frac{9}{4\rho} + \frac{4}{\rho^2}} - \left(\frac{1}{16} + \frac{2}{\rho}\right)$

Calcul préliminaire :

$$d\eta = d\left[\sqrt{\frac{15}{128} + \frac{9}{4\rho} + \frac{4}{\rho^2}}\right] - d\left(\frac{1}{16} + \frac{2}{\rho}\right)$$

$$= - \frac{\frac{9}{4\rho^2} + \frac{8}{\rho^3}}{2\sqrt{\frac{15}{128} + \frac{9}{4\rho} + \frac{4}{\rho^2}}} d\rho + \frac{2}{\rho^2} d\rho$$

$$= d\rho \left[ \frac{2}{\rho^2} - \frac{\frac{9}{4\rho^2} + \frac{8}{\rho^3}}{2\sqrt{\frac{15}{128} + \frac{9}{4\rho} + \frac{4}{\rho^2}}} \right]$$

Calcul de l'erreur sur  $\frac{M_u}{M_e}$

$$d \left( \frac{M_u}{M_e} \right) = \frac{d\rho}{6+\rho} + \frac{d\eta}{1-\eta} + \frac{2\eta d\eta + \frac{\rho}{3} 3\eta^2 d\eta + \frac{\eta^3}{3} d\rho + 2(1-\eta)(-d\eta)}{\eta^2 + \frac{\rho}{3} \eta^3 + (1-\eta)^2 + \frac{\rho}{16} \left( \frac{31}{32} - \eta \right)^2}$$

$$+ \frac{\left( \frac{31}{32} - \eta \right)^2 \frac{d\rho}{16} + \frac{\rho}{16} 2 \left( \frac{31}{32} - \eta \right)^2 (-d\eta)}{\eta^2 + \frac{\rho}{3} \eta^3 + (1-\eta)^2 + \frac{\rho}{16} \left( \frac{31}{32} - \eta \right)^2}$$

$$\frac{\Delta \left( \frac{M_u}{M_e} \right)}{\frac{M_u}{M_e}} = \Delta \rho \left| -\frac{1}{6+\rho} + \frac{1}{1-\eta} \left[ \frac{2}{\rho^2} - \frac{\frac{9}{4\rho^2} + \frac{8}{\rho^3}}{2\sqrt{\frac{15}{128} + \frac{9}{4\rho} + \frac{4}{\rho^2}}} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\left[ \frac{2}{\rho^2} - \frac{\frac{9}{4\rho^2} + \frac{8}{\rho^3}}{2\sqrt{\frac{15}{128} + \frac{9}{4\rho} + \frac{4}{\rho^2}}} \right] \left[ 4\eta + \rho\eta^2 - 2 - \frac{\rho}{8} \left( \frac{31}{32} - \eta \right)^2 \right]}{\eta^2 + \frac{\rho}{3} \eta^3 + (1-\eta)^2 + \frac{\rho}{16} \left( \frac{31}{32} - \eta \right)^2} \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{\eta^3}{3} + \frac{1}{16} \left( \frac{31}{32} - \eta \right)^2}{\eta^2 + \frac{\rho}{3} \eta^3 + (1-\eta)^2 + \frac{\rho}{16} \left( \frac{31}{32} - \eta \right)^2} \right|$$

$$= \Delta \rho \left| -0,136 + 1,818 (1,097 - 1,136) \right.$$

$$\left. \frac{(-0,039)}{0,572} [1,800 + 0,273 - 2,500 - 0,169 \cdot 0,269] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{0,572} [0,030 + 0,017] \right|$$

$$\frac{\Delta \left( \frac{M_u}{M_e} \right)}{\frac{M_u}{M_e}} = \Delta \rho \left| -0,136 - 0,071 - 0,002 + 0,082 \right| = 0,127 \cdot \Delta \rho$$

$$= 0,208 \cdot 0,127 = 0,026$$

\* Erreur due à l'expérimentation ou aux défauts de fabrication

Comme pour les essais des poutres soumises à l'effort tranchant, il semble raisonnable de prendre une incertitude relative de 5 %, traduisant le fait que la poutre n'est pas géométriquement idéale et n'est pas non plus dans des conditions idéales de chargement.

L'ordre de grandeur de l'erreur relative globale sur les essais de flexion se situe donc entre 6 et 8 %.

5.2.4. Comparaison des résultats expérimentaux aux charges théoriques

La corrélation entre les résultats expérimentaux et les charges théoriques est bonne. On note en particulier que le raidisseur longitudinal joue un rôle efficace dans la charge ultime que peut supporter la poutre.

Les charges critiques calculées à partir de la théorie linéaire des plaques sont respectivement 2 et 8 fois inférieures aux charges ultimes des poutres avec et sans raidisseur.



## CONCLUSION

-:-:-

Dans le présent exposé, nous avons tenté de faire la synthèse des travaux concernant la stabilité des coques prismatiques à parois minces. Cette synthèse, sans doute reste incomplète, mais nous avons cependant par des constatations théoriques et expérimentales pu mettre en évidence les points suivants :

1°) La théorie linéaire des plaques est insuffisante pour donner une indication fondamentale sur le comportement des panneaux constituant la coque prismatique. (Les charges critiques sont inférieures de 2 à 8 fois aux charges ultimes des panneaux).

2°) La théorie de BASLER que nous avons analysée et à laquelle nous avons apporté un certain nombre de correctifs, donne une indication valable sur la charge ultime d'une coque mince raidie longitudinalement ou non. Nous avons noté en particulier que le raidisseur longitudinal embouti présentait un intérêt pour les panneaux soumis à la flexion, mais qu'au contraire, il s'avèrait néfaste pour le cas des panneaux soumis à l'effort tranchant.

Compte tenu de ces deux observations, nous pensons que le dimensionnement des poutres caissons à coefficient de finesse élevé doit se faire en adoptant des coefficients de sécurité vis-à-vis de la charge ultime et non pas vis-à-vis de la charge critique théorique correspondant au voilement de l'âme.

Comme continuité à ce travail, nous envisageons un programme d'essais destiné à :

1°) Mettre en évidence la position optimum du raidisseur longitudinal embouti pour des coefficients de finesse différents : 100, 250, 400, 600 et pour des poutres soumises à la flexion pure. Ceci pour montrer qu'en fait, la position du raidisseur au  $1/5^{\text{ème}}$  supérieur de la hauteur d'âme, théoriquement idéale, est influencée par le coefficient de finesse du panneau.

2°) Le raidissage longitudinal par emboutissage n'ayant pas donné satisfaction pour les poutres soumises à l'effort tranchant, nous envisageons une série d'essais sur poutres raidies transversalement par un emboutissage du même type que celui que nous avons adopté longitudinalement.



## BIBLIOGRAPHIE

-:-:-

- 1 - BRYAN  
On the Stability of a Plane Plate under thrusts in its own Plane with Application on the Buckling of the Sides of a Ship.  
Proc. London. Math. Soc. 1891.
- 2 - TIMOSHENKO  
Théorie de la stabilité élastique  
DUNOD - 1966.
- 3 - TIMOSHENKO  
Sur la stabilité des systèmes élastiques  
Annales des Ponts et Chaussées - 1913.
- 4 - RITZ  
Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik.  
Zeitschrift für reine und angewandte Mathematik - 1909.
- 5 - KLOPPFEL-SCHEER  
Beulwerte ausgesteifter Rechteckplatten.  
Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn - 1960.
- 6 - BUDIANSKY-CONNOR  
Buckling stresses of clamped rectangular flat plates in shear  
N.A.C.A. Note n° 1565 - 1948.
- 7 - NOLKE  
Biegungsbeulung der Rechteckplatten mit eingesspannten Längsrändern  
Bauingenieur. Vol. 17 - 1936.
- 8 - TIMOSHENKO - WAY  
Stability of rectangular plates under shear and bending forces  
J. of Appl. Mech - Dec. 1935.
- 9 - KARMAN  
Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Vol IV - 1920

- 10 - DIJLAARD  
Some Contributions to the elastic and plastic Stability  
Mem. A.I.P.C. Vol VIII - 1947.
- 11 - BIJLAARD  
Theory and Tests on the plastic Stability of Plates and shells  
J. Aero. Sciences - 1949.
- 12 - ILLIOUSHINE  
The elasto plastic stability of Plates  
NACA. Techn. Mem. - 1188
- 13 - STOWELL  
Unified theory of plastic buckling of columns and Plates  
NACA. techn. Note 1556 - 1948
- 14 - SHANLEY  
Inelastic Column Theory  
Journal Aeronautics Sciences - 1947
- 15 - ENGESSER  
Zeitschrift für Architecktur und Ingenieurwesen - 1889.
- 16 - KARMAN  
Forschungsarbeit n° 81. - Berlin 1910.
- 17 - BLEICH  
Buckling strength of metal structures  
Mac Graw Hill Book Company - 1952.
- 18 - ROS-EICHINGER  
Final Rept. 1<sup>st</sup>. congr. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng. - Paris 1932
- 19 - BASLER - THURLIMANN  
Buckling Tests on Plate Girders  
6ème Congrès de l'A.I.P.C. - Stockhlom 1960
- 20 - BASLER - THURLIMANN  
Strength of Plates Girders  
Transaction A.S.C.E. Vol. 128 - 1963  
LEHIGH University - BETHLEHEM. Pa. U.S.A.

21 - DE VRIES

Transactions A.S.C.E. Vol. 86, n° ST7 . - 1960.

22 - Code A.S.M.E. - Nuclear Vessel 1965 , Section III

23 - FUJII

Minimum Weight Design of Structures based on Buckling Strength and plastic collapse 1<sup>st</sup>, 2<sup>nd</sup>, 3<sup>rd</sup> rapport.

Journal of the Society of Naval Architects of Japan. Vol 119,120 - 1966-67

24 - GAYLOAD

Transactions of the American Society of Civil Engineers Vol. 129 - 1963.

25 - COOPER

Bending and shear strength of longitudinally stiffened plates girders.

LEHIGH University. Ph, D - 1965.

26 - MASSONNET

Voilement des plaques planes sollicitées dans leur plan

Note B-13.2 du C.E.C.M. - 1954.

27 - DUBAS

Contribution à l'étude du voilement des tôles raidies

Prélim. - 3ème rapport du congrès International des Ponts et Charpentes

Liège 1948 p. 129.

28 - MILOSAVLJEVITCH

Sur la stabilité des plaques rectangulaires renforcées par des raidisseurs et sollicitées à la flexion et au cisaillement.

Publications de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes

Vol. 8 p. 141 - 1947.





